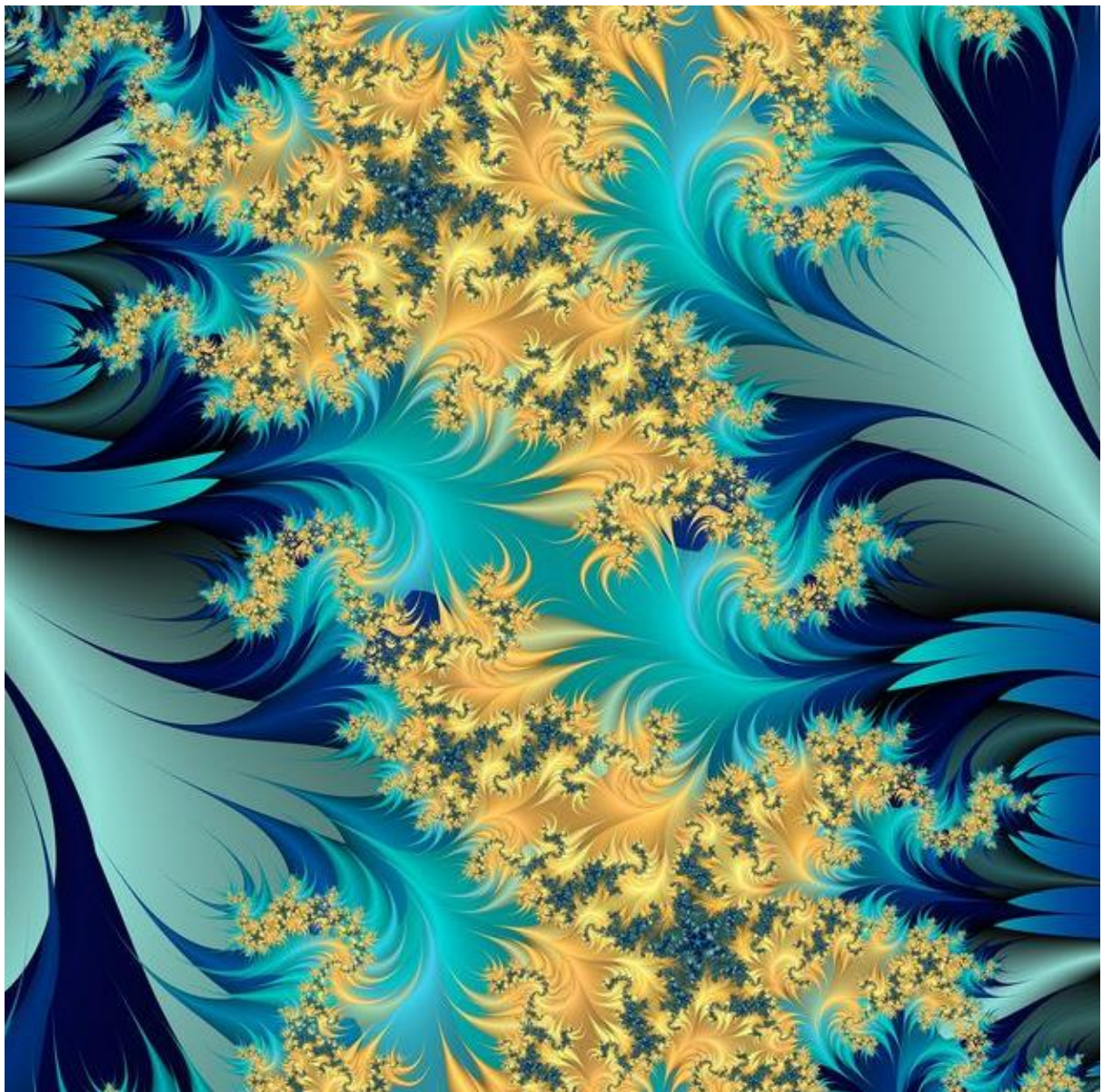


**Студентські
фізико-математичні
етюди**

2021, № 21



**НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ М.П.ДРАГОМАНОВА**

**ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ,
ІНФОРМАТИКИ ТА ФІЗИКИ**

**Студентські
фізико-математичні
етюди
№ 21**

Київ - 2021

УДК 51+53+004+372

Студентські фізико-математичні етюди. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2021. — № 21. — 123с.

Основу збірника складають наукові роботи студентів факультету математики, інформатики та фізики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова, присвячені сучасним проблемам математики, фізики, астрономії, інформатики, а також методики, методології та історії фізико-математичних наук.

Для студентів фізико-математичних спеціальностей.

Головний редактор

Працьовитий М. В. — доктор фіз.-мат. наук, професор, декан факультету математики, інформатики та фізики;

Редакційна колегія

Гончаренко Я. В. — канд. фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри методології та методики навчання фізико-математичних дисциплін вищої школи, відповідальний редактор;

Горбачук І.Т. — канд. фіз.-мат. наук, професор;

Кондратьєв Ю.Г. — доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри методології та методики навчання фізико-математичних дисциплін вищої школи;

Торбін Г.М. — доктор фіз.-мат. наук, професор, проректор з наукової роботи НПУ імені М.П.Драгоманова;

Требенко О.О. — канд. фіз.-мат. наук, завідувач кафедри вищої математики, заступник декана факультету математики, інформатики та фізики;

Швець В.О. — кандидат педагогічних наук, професор, завідувач кафедри математики і теорії та методики навчання математики;

Шут М.І. — доктор фіз.-мат. наук, професор, академік НАПНУ, завідувач кафедри загальної і прикладної фізики.

Рекомендовано до друку

*Вченою радою факультету математики, інформатики та фізики
НПУ імені М. П. Драгоманова, протокол № 1 від 21.01.2022*

© НПУ імені М. П. Драгоманова, 2022

ЗМІСТ

<i>Андрєєва А.М.</i> Теорії походження та еволюції Всесвіту за космологічними моделями Віллема де Сіттера та Олександра Фрідмана.....	4
<i>Урсул К.В.</i> Аналітичні залежності поширення ультразвуку в аморфно-кристалічних полімерах	13
<i>Галів Т.В.</i> Ітераційні процедури розв’язування інтегральних рівнянь Вольтерри зі степеневими нелінійностями	19
<i>Колодуб О.І.</i> Алгоритм наближення поліномами розязків диференціальних рівнянь Абеля.....	27
<i>Нікорак О.О.</i> Одна фрактальна функція інверсного типу, визначена у термінах D_2 -зображення чисел одиничного відрізка	34
<i>Нитник А.С.</i> Моделювання часових рядів за допомогою модифікацій Q-зображень дійсних чисел.....	42
<i>Прусенко В.С.</i> m-Функція Вейля індефінітних диференціальних операторів.....	48
<i>Мороз В.П.</i> Аналіз ризиків та моделювання показників, що визначають розвиток людського капіталу України.....	62
<i>Дубіна А.В., Пікуза О.В.</i> Програмна реалізації алгоритму оптимізації грошових потоків.....	71
<i>Андрєєва А.М.</i> Використання законів фізики в сучасних електронно-технічних пристроях, як засіб підвищення фахових знань з фізики	86
<i>Донець В.Р.</i> Інтегровані уроки з математика та інформатики: розв’язання математичних задач в середовищі програмування Scratch	98
<i>Куца Д.В.</i> Модернізація лабораторних робіт за допомогою аналого-цифрових перетворювачів.....	108
<i>Яремчук Д.М.</i> Використання СКМ Maple при вивченні теми «Похідна та її застосування»	114

Андрєєва А.М.

магістрантка спеціальності «Фізика та астрономія»

факультету математики, інформатики та фізики НПУ імені М.П. Драгоманова

Науковий керівник: канд.пед.н., доц. **Кириленко О.І.**

ТЕОРІЇ ПОХОДЖЕННЯ ТА ЕВОЛЮЦІЇ ВСЕСВІТУ ЗА КОСМОЛОГІЧНИМИ МОДЕЛЯМИ ВІЛЛЕМА ДЕ СІТТЕРА ТА ОЛЕКСАНДРА ФРІДМАНА

Анотація. У статті розглядається космологічні моделі походження та будови Всесвіту, згідно із теоретичними уявленнями видатних науковців ХХ століття Віллема де Сіттера та Олександра Фрідмана.

Ключові слова: космологія, моделі Всесвіту, астрономія, теоретична фізика, походження та еволюція Всесвіту.

Abstract. The article considers the cosmological models of the origin and structure of the universe, according to the theoretical ideas of prominent scientists of the XX century Willem de Sitter and Alexander Friedman.

Keywords: cosmology, models of the Universe, astronomy, theoretical physics, the origin and evolution of the universe.

Актуальність. Над космологічними проблемами людство замислювалося від початку свого існування. Про виникнення та будову Всесвіту кажуть численні міфи різних народів. Наукова космологія розпочалася з робіт астрономів епохи Відродження: Миколи Коперника (1473–1543), Йоганна Кеплера (1571–1630) та Галілео Галілея (1564–1642). Проте всі вони не йшли далі за сферу нерухомих зір, тобто цікавилися лише будовою Сонячної системи. Математичну основу цей напрямок набув після встановлення закону всесвітнього тяжіння Ісааком Ньютоном (1642-1727). Космогонічні теорії вперше запропонували П'єр Симон Лаплас (1749-1827) та Іммануїл Кант (1724-1804). Такі теорії продовжують розвиватись аж до теперішнього часу на основі найсучасніших уявлень фізики, але ця наука називається космогонією, а не космологією [2, С. 3].

Світ зір у Галактиці вивчався багатьма вченими, відзначимо внесок Вільяма Гершеля (1738–1822), який побудував першу схему будови Галактики. Після відкриття численних слабких туманностей виникла суперечка, де вони знаходяться: у нашій Галактиці чи за її межами. Суперечка тривала до 20-х років минулого століття, поки найближчі галактики не були розкладені на зорі [2, С. 3].

Сучасна космологія вивчає світ галактик та скупчень галактик, а також загальна будова, походження та еволюція Всесвіту [2, С. 3].

Теоретичною основою загальноприйнятої космології зараз є теорія тяжіння Альберта Ейнштейна (1879-1955), так звана загальна теорія відносності (ЗТВ), та роботи Олександра Олександровича Фрідмана (1888-1925), який отримав в 1922 р. перші нестационарні розв'язки рівнянь тяжіння Ейнштейна. Виконавчий базис її складають відкрите в 1929 р. Едвіном Поуеллом Хабблом (1889-1953) явище розбігання галактик від нас із швидкостями, пропорційними відстаням до них, а також існування та властивості реліктового фонового випромінювання, виявленого у 1964 році [2, С. 3].

Мета статті полягає у вивченні історії відкриття сучасних космологічних моделей Всесвіту; дослідження основних космологічних принципів моделей Віллема де Сіттера та Олександра Фрідмана, а також аналізі рівнянь, які пояснюють можливі варіанти еволюції Всесвіту.

Виклад основного матеріалу. Як відомо, теорія тяжіння Ейнштейна, опублікована в 1915 році, в останні роки отримала тріумфальне обґрунтування, кількісно пояснивши астрономічні явища та факти: зміщення перигелія Меркурія (1915), відхилення променя в полі тяжіння Сонця (1919) і гравітаційного зменшення частоти випромінювання, походить від важкого тіла (1961).

Майже одразу після формулювання відомого рівняння тяжіння А. Ейнштейн (1917), яке входить до створеної ним раніше ЗТВ, вчений намагався отримати висновки щодо питання будови Всесвіту [2, С. 4].

Отримане рівняння пов'язує кривизну простору-часу з матерією, що заповнює даний викривлений простір. Згідно з цією теорією, простір і час – величини взаємозалежні. Їх визначає розподіл гравітаційних мас у Всесвіті. А його властивості як цілого, зумовлені значенням середньої густини речовини та іншими фізичними параметрами. Тобто з рівнянь випливало, що Всесвіт не є стаціонарним, а має або стискатись, або розширюватись [1, С. 185].

Замість того, щоб відтворювати рівняння ЗТВ і виводити з них рівняння Фрідмана, в курсах космології зазвичай використовується простіший шлях, свого роду напівкласичний метод [2, С. 4].

Розглянемо деяку точку на відстані R від початку і помістимо туди деяке пробне тіло (матеріальну точку) масою m . Використаємо відому властивість ньютонівського потенціалу, яка полягає в наступному: при сферично симетричному розподілі щільності на наше тіло впливає лише маса, що перебуває всередині сфери радіуса R . Тому позбудемося простору кулі, який обмежує данну сферу. Зазначимо поведінку та властивості. При цьому можна вважати, що вся маса кулі зосереджена у центрі [2, С. 4].

На дане тіло діє сила:

$$F = G \frac{mM}{R^2}, \quad (1)$$

де $G = 6,672 * 10^{-8} \frac{\text{см}^3}{\text{с}^2 * \text{г}}$ – постійна тяжіння (1.1),

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \text{ – маса кулі} \quad (1.2)$$

Вважаємо, що обертальний рух тіла відсутній та відсутні інші сили, окрім тієї, яка напрямлена вздовж радіуса кривизни (1). Також швидкість кулі, має такий самий напрям як і сила, тобто рух тіла є прямолінійним. Запишемо рівняння (1) в скалярному вигляді:

$$m\ddot{R} = -F \quad (2),$$

або:

$$\ddot{R} = -G \frac{M}{R^2} \quad (3)$$

Рівняння (3) відповідає задачі двох зв'язаних тіл в найпростішому випадку, коли відносний рух відбувається вздовж прямої. При цьому несуттєво, що речовина рухається разом з розглянутим тілом. Розв'язок рівняння (3) запишемо у наступному вигляді, домноживши на \dot{R} та проінтегрувавши відповідно:

$$\frac{\dot{R}^2}{2} = \frac{GM}{R} - k \quad (4)$$

де $E > 0$ — величина повної (модуль суми кінетичної та потенціальної) енергії одиниці маси тіла, k — її знак, тобто k може бути 1, -1 або 0 (повна енергія пробного тіла рівна $-kE$).

Ані величина енергії, ані її знак не змінюються під час руху.

Розділивши співвідношення (4) відносно первісної знайдемо

$$\frac{dR}{\sqrt{2\left(\frac{GM}{R} - kE\right)}} = dt \quad (5)$$

Вигляд рівняння залежить від знаку енергії k .

Коли було з'ясовано, що основне рівняння тяжіння ЗТВ має не одне, а багато розв'язків, з'явилися інші космологічні моделі Всесвіту. Одну з таких у 1917 р. запропонував голландський астроном та фізик Віллем де Сіттер (1872 – 1934 рр.).

Ця модель передбачала можливість швидкого руху космічних об'єктів і стала попередницею пізніших теорій Всесвіту, що розширюється.

Згідно уявлень та міркувань вченого Всесвіт мав постійну кривизну, але не був ані позитивним, ані негативним. В цій космологічній моделі зберігалася позитивна ейнштейнівська космологічна константа (Λ), проте повністю була відсутня матерія.

Космологічна константа встановлює швидкість розширення Всесвіту та призводить до більшої швидкості розширення:

$$H = \frac{\dot{R}}{R} \text{ – функція Хаббла} \quad (6)$$

$$H \propto \sqrt{\Lambda} \quad (7),$$

де H – константа пропорційності залежать від умов.

Частину цього рівняння прийнято описувати як розширюваний Всесвіт метричної форми Фрідмана-Леметра-Робертсона-Уокера (ФЛРУ), де масштабний коефіцієнт визначається як [6]:

$$\alpha(t) = e^{Ht} \quad (8),$$

де константа H – це швидкість розширення Хаббла, t – час, $a(t)$ – масштабний коефіцієнт, описує розширення фізичних просторових відстаней.

При введенні пробних частинок як завгодно малої маси вони розбігаються і йдуть в нескінченність. Крім того, час на периферії час плине повільніше, ніж в її центрі (Рис. 1) [3].

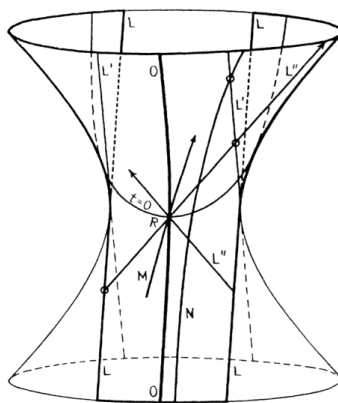


Рис. 1. Простір Віллема де Сіттера, представлений у вигляді гіперболоїда, де два виміри відсутні

Основними припущеннями космологічної моделі Всесвіту Віллема де Сіттера є (Рис. 2) [5]:

1. Швидкість фотона залежить від відстані його до точки, у якій знаходиться спостерігач, і тому спостерігач ніколи не зможе дізнатися про те, що відбувається далі, за межами певної відстані.
2. Модель припускає ефект червоного зміщення.
3. Матеріальні частинки "розбігатимуться" одна від однієї.

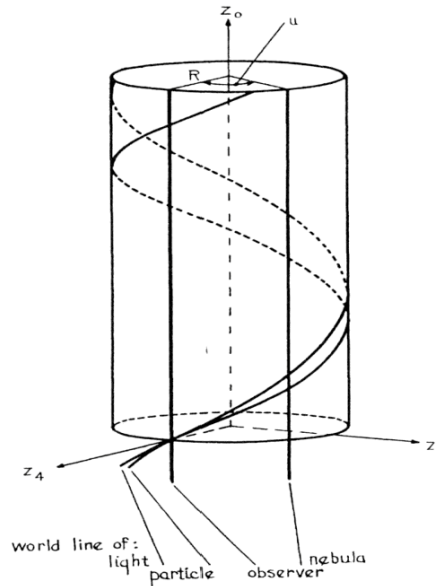


Рис. 2. Космологічна модель Віллема де Сіттера

Унікальність Всесвіту, описаною метрикою ФЛРУ, Всесвіт Віллема де Сіттера має закон Хаббла, який є послідовним не тільки в усьому просторі, але і впродовж усього часу (оскільки параметр уповільнення дорівнює $k = -1$), таким чином задовольняючи ідеальний космологічний принцип, що передбачає ізотропність і однорідність у просторі та часі. Існують способи перетворення простору Віллема де Сіттера зі статичними координатами, тому, на відміну від інших моделей ФЛРУ, даний простір можна розглядати як статичне рішення рівнянь Ейнштейна, навіть якщо експериментальні данні астрономічних спостережень, обов'язково розходяться, як очікувалося від розширення фізичних просторових вимірів.

Як космологічна модель для Всесвіту, розв'язок Віллема де Сіттера не вважався спроможним для пояснення спостереження Всесвіту, поки не були розроблені моделі для інфляції та темної енергії. Раніше вважалося, що Великий Вибух означав лише прийняття слабшого космологічного принципу, який стверджує, що ізотропія та однорідність застосовуються просторово, але не в часі [7].

У 1922 р. О. Фрідман знайшов нові розв'язки рівняння тяжіння ЗТВ, з яких випливало кілька сценаріїв розвитку Всесвіту. Серед них був цікавий варіант, коли космологічна стала дорівнювала нулю ($\Lambda = 0$). Тоді еволюція Всесвіту стає залежною від початкового значення густини речовини, а Всесвіт, заповнений масою, на яку діє сила тяжіння, не може бути статичним. Він має або розширюватися, або стискатися. Космологічна модель О. Фрідмана вказує на те, що розвиток Всесвіту залежить від кількості речовини в ньому (інакше – від значення середньої густини речовини у Всесвіті) [1, С. 185].

У сучасній космології три класи Всесвітів (відкритих, плоских або закритих) відомі як Всесвіти Фрідмана і описуються двома рівняннями [2, С. 9]:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + 3\frac{P}{c^2} \right) R + \frac{\Lambda c^2}{3} R \quad (9)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 + \frac{\Lambda c^2}{3} R^2 - kc^2 \quad (10),$$

де R – радіус кривизни простору, Λ – космологічна константа,

$$\rho = \rho_m + \rho_r \text{ – масова густина матерії,} \quad (10.1)$$

тобто речовини (m) та випромінювання (r),

$$P = P_m + P_r \text{ – тиск} \quad (10.2)$$

Константа k може набувати одне з трьох значень: $k = 1, 0, -1$, відповідно для моделей замкнутого, плоского та відкритого Всесвіту.

Тобто, Всесвіт не може перебувати в стаціонарному стані – він має розширюватися або звужуватися (Рис. 3) [4].

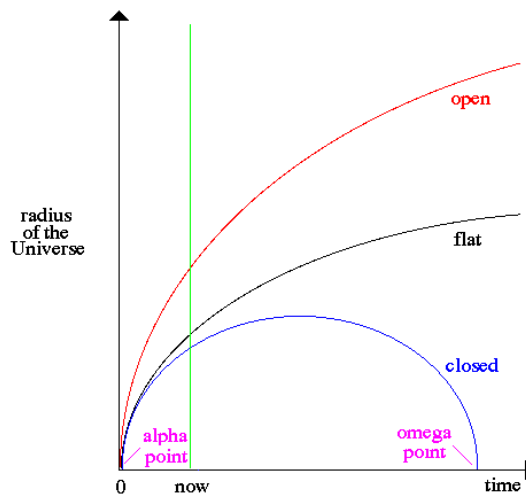


Рис. 3. Розширення та геометрія для замкнутого, плоского та відкритого Всесвітів

Результати. Рівняння Фрідмана (9) та (10) втілює зміст рівняння Ейнштейна: матерія та енергія впливають на те, як згинається простір-час. У загальній теорії відносності кривизну створює не тільки матерія, а й будь-який вид енергії. Це означає, що гравітаційне притягання має внесок не тільки від звичайної матерії, а й від темної матерії та випромінювання (безмасових частинок, таких як фотони). Кінетична енергія частинок зазвичай включається в рівняння Ейнштейна як термін тиску, оскільки тиск можна розглядати як густину енергії або кінетичну енергію на одиницю об'єму. Існує також негативний тиск від темної енергії.

З рівняння Фрідмана (11):

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} - \text{критичний параметр,} \quad (11)$$

де ρ_c – критична густина.

Ми бачимо, що взаємодія розширення Всесвіту, щільності та кривизни призводить до кількох можливостей для долі Всесвіту, залежно від того, який член у рівнянні домінує.

Критичний Всесвіт: ми вже обговорювали випадок критичного Всесвіту, де умови розширення та щільності рівні, $\Omega=1$, а простір загалом не викривлений. Якщо немає темної енергії, Всесвіт продовжуватиме розширюватися, але все повільніше (Рис. 4)

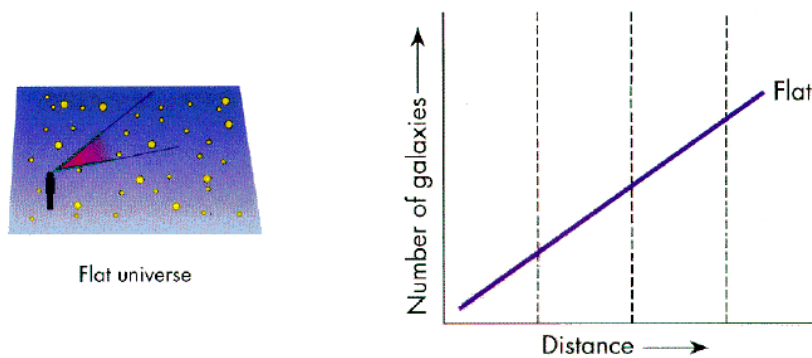


Рис. 4. Космологічна модель Фрідмана – просторова кривизна Всесвіту нульова

Терміни матерії домінують: якщо Всесвіт містить достатню масу, щоб протидіяти його розширенню, і немає темної енергії, він зрештою зруйнується. Це відомо як закритий Всесвіт (Рис. 5). У цьому випадку $\Omega > 1$.

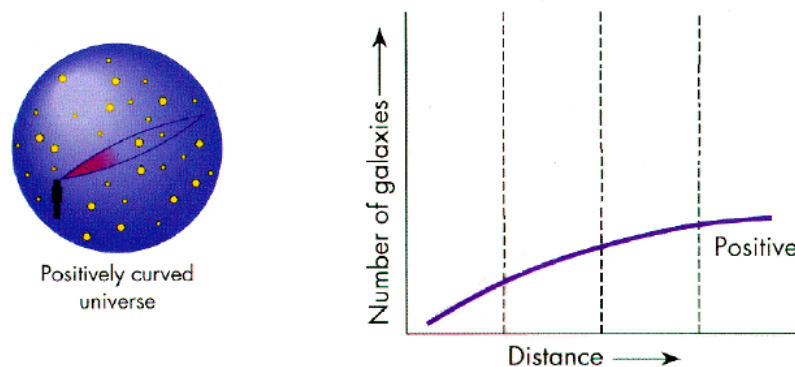


Рис. 5. Космологічна модель Фрідмана – просторова кривизна Всесвіту додатна

Термін розширення домінує: якщо Всесвіт не містить достатньої маси, щоб протидіяти його розширенню, і немає темної енергії, він буде розширюватися

вічно. Це відомо як відкритий Всесвіт. У цьому випадку $\Omega < 1$ (Рис. 6).

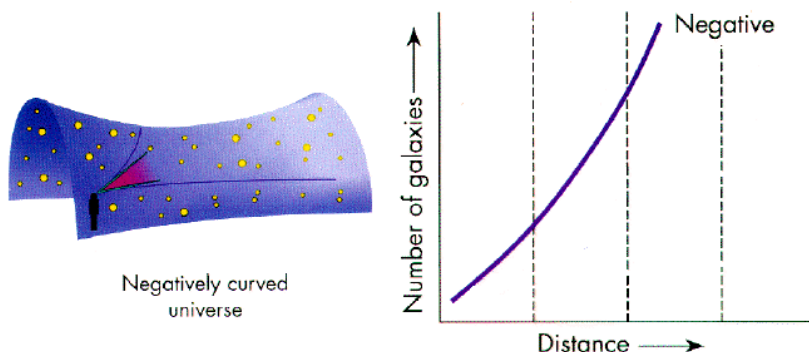


Рис. 6. Космологічна модель Фрідмана – просторова кривизна Всесвіту негативна

Темна енергія домінує: жодна з трьох наведених вище можливостей не призводить до прискорення швидкості розширення, підтвердженого даними наднової. Темна енергія може призвести до прискорення розширення; тому ми повинні вивчити можливості, які включають темну енергію.

Висновки. Питання походження й розвитку Всесвіту, яке споконвіку хвилює людину, стало прояснюватися лише в ХХ ст.– після відкриття космологічного розширення. Згідно з сучасними уявленнями наш Всесвіт існує близько 13,7 млрд р. Він виник унаслідок Великого Вибуху, зазнав дуже швидкого розширення, після чого вступив в епоху формування галактик і зір. Нині цей етап розвитку Всесвіту все ще триває. Розширення Всесвіту відбувається прискорено і, ймовірно, він буде необмежено розширюватися й надалі.

Отже, без фундаментальних космологічних моделей Віллема де Сіттера та Олександра Фрідмана досить важко було б уявити сучасні теорії та гіпотези реального Всесвіту, адже саме дані моделі вперше намагалися пояснити астрофізичні експериментальні дослідження з боку теоретичної фізики.

На сьогодні, моделі є актуальними в розрізі вивчення та дослідження фізичних процесів, які формувалися на ранніх стадіях розширення та еволюції Всесвіту.

Список використаної літератури

1. Головки М. В., Крячко І. П. Астрономія: навчальний посібник / М. В. Головки, І. П. Крячко. – К.: ТОВ «КОНВІ ПРІНТ», 2018. – 272 с.
2. Нагирнер Д.И. Космологические модели. Учебное пособие: Санкт-Петербург, 2017. – 75 с.
3. Гіпотези походження всесвіту. [Електронний ресурс] – Режим доступу : <https://cutt.ly/ZYmP9Te>

4. Космологія - релятивістські космології [Електронний ресурс] – Режим доступу : <https://cutt.ly/hYmP5Ru>
5. Моделі Всесвіту [Електронний ресурс] – Режим доступу : <https://cutt.ly/GYmAqMe>
6. Adler, Ronald; Maurice Bazin; Menahem Schiffer Introduction to General Relativity. NY: McGraw-Hill, 1965 – 468 p.
7. Dodelson, Scott Modern Cosmology San Diego: Academic Press. ISBN 978-0-12-219141-1, 2003.

Урсул К.В.

студентка спеціальності 014 Середня освіта (Фізика)

факультету математики, інформатики та фізики НПУ імені М.П. Драгоманова

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доц. **Рокицький М.О.**

АНАЛІТИЧНІ ЗАЛЕЖНОСТІ ПОШИРЕННЯ УЛЬТРАЗВУКУ В АМОРФНО-КРИСТАЛІЧНИХ ПОЛІМЕРАХ

Анотація. У статті йдеться про дослідження зв'язку між швидкістю поширення звуку в полімері, динамічним модулем пружності та ступенем його кристалічності, а саме про встановлення відповідних аналітичних залежностей. Аналізуючи отримані формули, було виявлено деякі особливості акустичних властивостей кристалічних полімерів, які перебувають при температурі нижчій за температуру склування. Розглянуто аналітичну залежність динамічного модуля пружності від ступеня кристалічності полімеру за теорією Такаянагі й теоремою Александрова.

Ключові слова: ступінь кристалічності, швидкість звуку, модель Кельвіна – Фойгта, оператор піддатливості, релаксційний процес, коефіцієнт поглинання, температура склування, динамічний модуль пружності, теорія Такаянагі, теорема Александрова.

Annotation. The article deals with the study of the relationship between the speed of propagation of sound in a polymer, dynamic modulus of elasticity and the degree of crystallinity, about finding analytical dependences. Analyzing the formulas, there have been constructed acts of special acoustic powers of crystalline polymers, which are used at the temperature of the lower level for the temperature of the sink. Improved the analytical dynamic modulus of the spring at the stage of the crystallinity of the model according to the theorem of Takayana and Aleksandrov's theorem.

Keywords: degree of crystallinity, speed of sound, Kelvin - Voigt model, compliance operator, relaxation process, absorption coefficient, glass transition temperature, dynamic modulus of elasticity, Takayanagi's theory, Aleksandrov's theorem.

Одним з параметрів кристалічних полімерів, від якого суттєво залежать їх механічні властивості, є ступінь кристалічності $\kappa = V_1/V$ (тут V_1 – об'єм кристалічної частини полімеру, V – об'єм усього полімеру) [1]. Зв'язок між швидкістю звуку та кристалічністю спостерігається експериментально, однак відповідні аналітичні залежності поки не встановлено.

Мета роботи полягає у дослідженні акустичних властивостей полімерних композитів, акустичного впливу на них для подальшого використання результатів у практичній діяльності.

Особливістю полімерів є їх чітко виражені в'язко-пружні властивості, які обумовлюють унікальний комплекс основних фізико-механічних властивостей.

Для більшості твердих тіл за малих деформацій виконується закон Гука:

$$\sigma = E s, \quad (1)$$

де σ – механічна напруга;

E – модуль пружності;

s – деформація.

Поведінка малов'язких рідин зазвичай описується законом Ньютона:

$$\sigma_{xy} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad (2)$$

де σ_{xy} – напруга зсуву;

η – коефіцієнт в'язкості;

$\frac{\partial v_x}{\partial y}$ – градієнт швидкості руху рідини.

Насправді не існує ідеальних ньютонівських рідин, повністю позбавлених пружності, як і не існує ідеально пружних тіл, за будь яких умов деформації закону Гука. Одним з перших на це звернув увагу Максвелл. Усі реальні тіла тою чи іншою мірою мають як пружні, так і в'язкі властивості. Але в'язко-пружна поведінка багатьох матеріалів проявляється слабо, і тому їх відносять лише до одного зі згаданих типів тіл.

Полімерні матеріали, як правило, проявляють і властивості пружних тіл, і рідин. Що в свою чергу провокує специфічний зв'язок між напругою та деформацією.

У випадку в'язко-пружних тіл зв'язок між механічною напругою σ (змінюється за періодичним законом) та деформацією s може бути представлена у вигляді:

$$\sigma = E^* s, \quad (3)$$

тут E^* – комплексний модуль пружності, рівний:

$$E^* = E' + iE''. \quad (4)$$

Дійсну частину модуля пружності E' називають динамічним модулем пружності, а уявну частину E'' – модулем втрат.

Вираз (3) має важливе значення для опису поведінки полімерних матеріалів за періодичного впливу. Нехай до тіла прикладено напругу, що змінюється за законом синуса:

$$\sigma = \sigma_0 \sin \omega t, \quad (5)$$

де σ_0 – амплітудне значення деформації;

ω – колова частота ($\omega = 2\pi f$, де f – число коливань за 1с);

t – час.

Якщо тіло виявляє лінійну в'язко-пружну поведінку, то деформація також буде змінюватись за законом синуса, але буде відрізнятись фазою від напруги:

$$s = s_0 \sin(\omega t - \delta), \quad (6)$$

де s_0 – амплітудне значення деформації;
 δ – зсув фаз між напругою та деформацією.

У будь-який момент часу:

$$E^* = \frac{\sigma}{s}. \quad (7)$$

Напругу, що змінюється за законом синуса і відмінна за фазою від деформації, можна розкласти на дві складові, одна з яких буде співпадати за фазою із деформацією, а друга відрізнятиметься на $\frac{\pi}{2}$. Отже, приходимо до фізичного змісту величин E' і E'' .

Модулем пружності називають величину напруги, яку необхідно прикласти, щоб відносна деформація матеріалу дорівнювала одиниці.

Динамічний модуль пружності E' являє собою дійсну частину комплексного модуля пружності. Рівний відношенню складової напруги, що співпадає за фазою з деформацією, до величини цієї деформації. Динамічний модуль пружності характеризує величину енергії яку отримує та віддає одиниця об'єму даного тіла за період. За постійної амплітуди коливань зі зростанням частоти E' зростає або залишається постійною.

Модуль втрат E'' є відношенням складової напруги, що відрізняється за фазою на $\frac{\pi}{2}$ від деформації, до величини цієї деформації. Модуль втрат E'' характеризує ту частину енергії пружних коливань, яка перетворюється в тепло за один період коливань. Коли зсув фаз між напругою та деформацією досягає максимального значення, E'' проходить через максимум. Тобто, E'' характеризує розсіювання енергії коливань у в'язко-пружному тілі.

Абсолютна величина комплексного модуля пружності рівна:

$$|E^*| = \sqrt{(E')^2 + (E'')^2}. \quad (8)$$

Розглянемо полімер, який може бути описаний узагальненою моделлю Кельвіна – Фойгта, тобто моделлю в'язко-пружних матеріалів, що характеризуються властивостями пружності та в'язкості (пружність стосується кристалічної частини (E_q), а в'язкість аморфної) [2].

Оператор піддатливості матиме такий вигляд:

$$I = \frac{1}{E_q} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{E_j} \cdot \frac{1}{1 + \tau_j \frac{\partial}{\partial t}}, \quad (9)$$

а діагональний елемент тензора напруги

$$\sigma_{xx} = I^{-1} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (10)$$

де E_j і τ_i - модуль та час релаксації j -того елемента, u - зміщення.

Підставимо вирази (1) і (2) у хвильове рівняння:

$$K^2 = -\rho\omega^2 \left\{ \frac{1}{E_q} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{E_j} \cdot \frac{1}{1 + i\omega\tau_i} \right\}, \quad (11)$$

де $K = \alpha + i\frac{\omega}{c}$ (α - коефіцієнт поглинання, ω - колова частота, c - швидкість звуку).

Вважаючи, що поглинання на довжині хвилі мале, тобто $\alpha\lambda/2\pi \ll 1$, і перейшовши від дискретного спектра до суцільного, отримаємо вираз для швидкості та коефіцієнт поглинання звуку:

$$\frac{1}{\rho c^2} = \frac{1}{E_q} + \int_0^{\infty} \frac{L(\tau) d\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad (12)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \rho \omega c \int_0^{\infty} \frac{L(\tau) \omega \tau d\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad (13)$$

де $L(\tau)$ – густина спектру часів запізнення. Допускаючи, що релаксаційні процеси в кристалічному полімері являють собою суперпозицію релаксаційних процесів у кристалічних та аморфних областях, можна представити:

$$L(\tau) = \kappa L_{1(\tau)} + (1 - \kappa) L_{2(\tau)}, \quad (14)$$

де індекси 1 і 2 відносяться відповідно до кристалічних та аморфних областей.

Якщо незалежна від частоти піддатливість $I_q = \frac{1}{E_q}$ пов'язана зі ступенем кристалічності κ відношенням типу (14), матимемо:

$$\frac{1}{\rho c^2} = \frac{\kappa}{\rho_1 c_1^2} + \frac{(1 - \kappa)}{\rho_2 c_2^2} = \frac{\kappa}{E_1} + \frac{(1 - \kappa)}{E_2}, \quad (15)$$

$$\frac{A}{\rho c^2} = \frac{\kappa A_1}{\rho_1 c_1^2} + \frac{(1 - \kappa) A_2}{\rho_2 c_2^2}. \quad (16)$$

Тут

$$\frac{1}{\rho_i c_i^2} = \frac{1}{E_{iq}} + \int_0^{\infty} \frac{L_{i(\tau)} d\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad (17)$$

$$A_1 = \frac{\alpha_i \lambda_i}{2\pi} = \frac{1}{2} \rho_i c_i^2 \int_0^{\infty} \frac{L_{i(\tau)} \omega \tau d\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad (18)$$

$i = 1$ або 2 .

Із формул (15) та (16) слідує, що при $\kappa \rightarrow 0$, $c \rightarrow c_2$ (швидкість звуку зменшується), $A \rightarrow A_2$; при $\kappa \rightarrow 1$ (зростання кристалічності) $c \rightarrow c_1$ і $A \rightarrow A_1$.

З аналізу формул (15), (16) та (17), (18) стають явними певні особливості акустичних властивостей кристалічних полімерів, які перебувають при температурі нижчій за температуру склування T_g . Відомо, що склоподібний стан полімерів характеризується загальмованістю релаксаційних процесів. Цей стан відповідає випадку, коли $\tau_j \rightarrow \infty$. Тоді другий член правої частини рівності $E' = |E^*| \cos \sigma$ перетворюється в нуль. Причому різниця $(E_{1q} - E_{2q}) \rightarrow 0$ ($E_{1q} \approx E_{2q} \approx E_q$) та при достатньо низьких температурах $\frac{1}{\rho c^2} = \frac{1}{E_q}$, тобто виявляється, що швидкість звуку не залежатиме від частоти та кристалічності.

Зв'язок між акустичними параметрами і кристалічністю полімеру може бути встановлена за будь якої форми оператора модуля або піддатливості.

Вважається, що зі зростанням ступеня кристалічності динамічний модуль пружності та швидкість звуку в полімері зростають. Баккаредда встановив, що ця залежність проявляється найбільш чітко, коли акустичні вимірювання проводяться за $T > T_g$ аморфного шару.

Зростання швидкості звуку та динамічного модуля з ростом ступеня кристалічності κ пов'язане зі збільшенням міжмолекулярної взаємодії в полімері як результат приросту вмісту впорядкованих кристалічних областей. Якщо аморфні області полімеру знаходяться в високоеластичному стані, для якого характерне послаблення міжмолекулярної взаємодії, цей ефект спостерігатиметься найчіткіше.

У більшості робіт прийнято, що в склоподібному стані (нижче T_g аморфного шару) модуль пружності та швидкість звуку не залежать від ступеня кристалічності, оскільки густина кристалітів та аморфних областей нижче T_g не повинні відрізнятися. За температури наближеної до кімнатної чітка залежність швидкості звуку та динамічного модуля від ступеня кристалічності має місце для таких полімерів, як поліетилен і політетрафторетилен.

Для аналітичного опису залежності динамічного модуля пружності від ступеня кристалічності використовують теорію Такаянагі [3]. Вона ґрунтується на тому, що двофазну систему можна представити у вигляді комбінації послідовно (чи паралельно) поєднаних складових. Також відома теорема К. С. Александрова, згідно з якою E' і $\text{tg } \delta$ багатоскладової системи можна представити у вигляді [4]:

$$\ln E' = \sum_n v_n \ln E'_n ; \quad (19)$$

$$\operatorname{tg} \delta = \sum_n v_n \operatorname{tg} \delta_n , \quad (20)$$

де v_n – об'ємна частка n -ої складової.

Проте жодна з них не може пояснити ефекти пов'язані з аномальним впливом ступеня кристалічності на в'язко-пружні властивості.

Висновки. Отже, існує взаємний зв'язок між хімічною будовою, молекулярною структурою полімерів і такими параметрами, як швидкість звуку, коефіцієнт поглинання звуку, компонент комплексних модулів пружності. Значення і характер зміни з частотою (або температурою) динамічних модулів пружності та швидкості звуку визначаються як енергією зв'язку атомів, що складають основний ланцюг полімеру (енергією внутрішньомолекулярної взаємодії), так і енергією взаємодії елементів сусідніх полімерних ланцюгів, тобто енергією міжмолекулярної взаємодії. У різних акустичних експериментах вони проявляються доволі специфічно.

На величину динамічних модулів пружності одного і того ж самого полімера, який перебуває в різних фізичних станах, сильніший вплив має характер міжмолекулярної взаємодії.

Модуль втрат, тангенс кута механічних втрат ($\operatorname{tg} \delta$), коефіцієнт поглинання звукових хвиль визначаються переважно типом та інтенсивністю молекулярного руху.

Динамічний модуль і швидкість звуку дають можливість отримати два роди інформації: по-перше, відомості про найважливіші механічні (деформаційні) властивості полімерів; по-друге – про структуру, будову та стан полімеру. Крім того, ці параметри дозволяють вивчити релаксаційні процеси, які й обумовлюють найважливіший комплекс фізико-механічних властивостей полімерів.

Список використаних джерел

1. Перепечко И. И. О распространении ультразвука в кристаллических полимерах (Москва, 29 декабря 1965 г.) – М.: Н.-и. институт пластических масс, 1965. – С.143 - 144.
2. Тобольский А. Свойства и структура полимеров. - М.: Химия, 1964. – 322 с.
3. Takayanagi M., Yoshino M., Minami Sh., J. Polymer Sci., 61, S7 (1962).
4. Перепечко И. И. Акустические методы исследования полимеров. – М.: Химия, 1973. – 296 с.

Галів Т. В.

магістрантка спеціальності «Математика»

факультету математики, інформатики та фізики НПУ імені М.П.Драгоманова

Науковий керівник:

кандидат фізико-математичних наук, доцент **Божонок К.В.**

ІТЕРАЦІЙНІ ПРОЦЕДУРИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВОЛЬТЕРРИ ЗІ СТЕПЕНЕВИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

Анотація. В цій роботі розглянуто ітераційні процедури для розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерри зі степеневими нелінійностями. Було наведено алгоритм пошуку наближеного розв'язку інтегрального рівняння та його застосування на конкретному прикладі.

Ключові слова: інтегральне рівняння, інтегральне рівняння Вольтерри зі степеневими нелінійностями, ітераційні процедури, найкраще наближення, апроксимаційний метод.

Abstract. In this work are considered the iterative procedures for solving Volterra integral equations with power nonlinearities. An algorithm for finding an approximate solution of an integral equation and its application are considered by example.

Keywords: integral equation, Volterra integral equation with power nonlinearities, iterative procedures, the best approximation, approximation method.

Вступ.

Нелінійні інтегральні рівняння виникають в різних областях сучасної науки й техніки, наприклад, у теорії пластичності, електродинаміці, гідродинаміці, біомеханіці, медицині. Інтегральні рівняння типу Вольтерри-Урисона широко використовують при моделюванні неперервних динамічних систем, але далеко не всіх їх можна розв'язати за допомогою аналітичного методу (див. [1]). Знайти наближення точного розв'язку можна чисельними методами, зокрема за допомогою побудови ітераційного процесу.

У цій роботі ми розглянемо алгоритм побудови поліноміального розв'язку інтегральних рівнянь Вольтерри зі степеневими нелінійностями за допомогою ітераційних процедур, що базується на α -методі В.К. Дзядика (див. [2]). Цей метод має властивості оптимальності і ненасиченості і дає можливість максимально точно (близько до найкращого наближення) знайти розв'язок нелінійних інтегральних рівнянь.

Постановка задачі.

Розглянемо нелінійне інтегральне рівняння

$$a(x)y(x) = f(x) + \int_0^x F(x, t, y(t))dt, \quad x \in [-h; h], \quad (1)$$

де $a(x)$, $f(x)$ – алгебраїчні многочлени степенів, відповідно, не вище на n_a і n_f , а $F(x, t, y)$ – алгебраїчний многочлен від трьох змінних виду

$$F(x, t, y) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \sum_{k=1}^K A_{ijk} t^i x^j y^k \quad (2)$$

де A_{ijk} – сталі коефіцієнти.

Алгоритм.

Згідно з загальною схемою, що базується на а-методі В. К. Дзядика (див. [3]), рівняння (1) замінюємо наближеним інтегро-функціональним рівнянням

$$a(x)y_n(x) = f(x) + \int_0^x F(x, t, y_n(t))dt - \varepsilon_N(x), \quad (3)$$

де $y_n(x)$ – розв'язок рівняння, що є алгебраїчним многочленом степенем не вище за n одного з наступних виглядів

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k, \quad y_n(x) = \sum_{k=0}^n \beta_k T_k\left(\frac{x}{h}\right), \quad (4)$$

з невідомими коефіцієнтами α_k (або β_k), а

$$T_{n+1}\left(\frac{x}{h}\right) = \cos(n+1) \arccos \frac{x}{h}$$

– многочлени Чебишова I роду на відрізку $[-h; h]$.

Величина $\varepsilon_N(x)$ – нев'язка многочлен степеня $N = \max[n_a, n_f - n, I + J + (k-1)_k + 1]$, що залежить від степенів многочленів $a(x)$, $f(x)$, $y_n(x)$ та $F(x, t, y)$:

$$\varepsilon_N(x) = \sum_{i=1}^N \tau_i T_{n+i}\left(\frac{x}{h}\right), \quad (5)$$

з невідомими допоміжними параметрами τ_i .

Підставляючи до (3) вирази для всіх многочленів $a(x)$, $f(x)$, $y_n(x)$ та $F(x, t, y_n(x))$, $\varepsilon_N(x)$ з урахуванням відомих представлень многочленів Чебишова $T_k\left(\frac{x}{h}\right)$ через алгебраїчні многочлени [3] і прирівнюючи коефіцієнтами за однакових степенів x , ми отримаємо систему $n+N+1$ нелінійних алгебраїчних

рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів α_k (або β_k), та допоміжних параметрів τ_i .

У зв'язку із нелінійністю отриманої системи в нашій роботі ми наведемо ітераційну схему розв'язання рівняння (3) і, відповідно, після застосування методу невизначених коефіцієнтів, і системи рівнянь для знаходження α_k (або β_k), та τ_i .

В основу запропонованої нами схеми закладений метод простої ітерації і аналогічні схеми для розв'язування рівняння Ріккати τ -методом Ланцоша [4]. Отже, розглянемо схему з лінійною швидкістю збіжності ітерацій.

$$\begin{aligned} a(x)y_n^{v+1}(x) &= f(x) + \int_0^x F(x, t, y_n^v(t)) dt - \varepsilon_N^v(x) = \\ &= f(x) + \int_0^k \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^K A_{sjk} t^i x^j y_n^{k,v}(t) - \sum_{i=1}^N \tau_i^v T_{n+1}\left(\frac{x}{h}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Тут $y_n^v(x)$ – многочлени виду (4) на v -ому кроці ітерацій:

$$y_n^v(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k^v x^k, \quad y_n^v(x) = \sum_{k=0}^n \beta_k^v T_k\left(\frac{x}{h}\right).$$

Теоретичне обґрунтування.

Збіжність ітераційного процесу (6) має місце в умовах наступної теореми про відхилення $y_n(x)$ від точного розв'язку $y(x)$ рівняння (1).

Нехай C будемо позначати простір неперервних на $[-h; h]$ функцій з нормою

$$\|\cdot\|_C = \max_{|x| \leq h} |\cdot|.$$

Введемо до розгляду величину $E_n(\varphi)$ – найкраще наближення функції $\varphi \in [-h; h]$ алгебраїчними многочленами степеня не вище за n

$$E_n(\varphi) = \inf_{\alpha_k} \left\| \varphi(x) - \sum_{k=0}^n \alpha_k x^k \right\|_C.$$

Будемо вважати, що виконується нерівність

$$\min_{x \in [-h; h]} a(x) \geq a^* > 0.$$

Тоді має місце наступна теорема:

Теорема 1. Нехай числа $h > 0$ і $n = 1, 2, 3, \dots$ такі, що в кулі $\sigma(\rho) = \{\psi \in C \mid \|\psi\|_C \leq \rho\}$ існує єдиний розв'язок $y(x)$ рівняння (1) і єдиний розв'язок $y_n(x)$ рівняння (3). Тоді має місце наступна оцінка

$$\|y(x) - y_n(x)\|_C \leq e^{\frac{hAm_1(h, \rho)}{a^*}} \left\| \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)} \right\|_C, \quad (7)$$

де

$$m_1(h, \rho) = \frac{(1 - h^{I+1})(1 - h^{J+1})}{(1 - h)^2} \sum_{k=1}^K k \rho^{k-1}, \quad A = \max_{i,j,k} |A_{ijk}|. \quad (8)$$

При цьому наближення $y(x)$ близьке до найкращого $E_n(y)$ в просторі $C[-h; h]$.

Доведення: Використовуючи припущення (6) розділимо обидві частини рівнянь (1) і (3) на $a(x)$. Знайдемо різниці лівих і правих частин, отримуємо:

$$\begin{aligned} y(x) - y_n(x) &= \frac{1}{a(x)} \int_0^x [F(x, t, y(t)) - F(x, t, y_n(t))] dt + \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)} = \\ &= \frac{1}{a(x)} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left(A_{ij1} x^i \int_0^x t^j [y(x) - y_n(x)] dt + \right. \\ &\left. + A_{ij2} x^i \int_0^x t^j [y^2(x) - y_n^2(x)] dt + \dots + A_{ijK} x^i \int_0^x t^j [y^K(x) - y_n^K(x)] dt \right) + \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)}. \end{aligned}$$

Використовуючи нерівність Гронуолла (див. [2, С. 122]) і $y, y_n \in \sigma(\rho)$, отримуємо оцінку

$$\|y(x) - y_n(x)\|_C \leq e^{hM} \left\| \frac{\varepsilon_N(x)}{a(x)} \right\|_C,$$

Де

$$\begin{aligned} M := & \left\| \frac{1}{a(x)} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J A_{ij1} x^i t^j \right\|_{C(\pi)} + 2 \left\| \frac{1}{a(x)} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J A_{ij2} x^i t^j \right\|_{C(\pi)} \cdot \rho \\ & + 3 \left\| \frac{1}{a(x)} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J A_{ij3} x^i t^j \right\|_{C(\pi)} \cdot \rho^2 + \dots \\ & + K \left\| \frac{1}{a(x)} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J A_{ijK} x^i t^j \right\|_{C(\pi)} \cdot \rho^{K-1}. \end{aligned}$$

Тут через $C(\pi)$ позначений простір неперервних функцій $\varphi(x, t)$, $x, t \in [-h; h]$ з нормою

$$\|\varphi\|_{C(\pi)} = \max_{|x| \leq h, |t| \leq h} |\varphi(x, t)|.$$

Після знаходження норм

$$\left\| \frac{1}{a(x)} \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J A_{ijk} x^i t^j \right\|_{C(\pi)}, \quad k = 1, \dots, K,$$

з урахуванням введених позначень $A = \max_{i,j,k} |A_{ijk}|$ і нерівності

$$\min_{x \in [-h; h]} a(x) \geq a_x > 0,$$

маємо оцінку (6). Теорема доведена.

Тепер можемо сформулювати теорему про збіжність побудованого вище ітераційного процесу.

Теорема 2. Нехай виконуються умови теореми (1) і, крім того, $y_n^v \in \sigma(\rho)$ для $v = 0, 1, 2, \dots$. Тоді на v -му кроці ітераційного кроку (6) має місце наступна оцінка

$$\begin{aligned} \|y(x) - y_n(x)\|_C &\leq \frac{(2hM)^v}{v!} \|y_n(x) - y_n^0(x)\|_C + \\ &+ \sum_{v=0}^{v-1} \frac{(2hM)^i}{i!} \|\varepsilon_N(x) - \varepsilon_N^v(x)\|_C, \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$M = A \cdot \frac{m_1(h, \rho)}{a^*}$$

з теореми 1.

Обчислювальний експеримент :

Розглянемо інтегральне рівняння виду

$$y(x) = x - \int_0^x y^2(t) dt, \quad x \in [-1; 1]. \quad (10)$$

Це рівняння має точний розв'язок $y(x) = \text{th}(x)$.

В силу того, що $y(x) = \text{th}(x)$ є непарною функцією, наближуємо розв'язок (10) многочленом

$$y_3(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3. \quad (11)$$

Отже, наближене рівняння (3) приймає вигляд

$$y_3(x) = x - \int_0^x y_3^2(t) dt - \varepsilon_N(x), \quad (12)$$

де $N = \max [0, 1 - 3, 4] = 4$.

Тут

$$\varepsilon_4(x) = \tau_1 T_4(x) + \tau_2 T_5(x) + \tau_3 T_6(x) + \tau_4 T_7(x),$$

де

$$\begin{aligned} T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, & T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, \\ T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1, & T_7(x) &= 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x \end{aligned}$$

– многочлени Чебишова I роду на $[-1; 1]$.

Підставимо до (12) вирази для $y_3(x)$ і $T_4(x)$, $T_5(x)$, $T_6(x)$, $T_7(x)$, маємо

$$C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 = x - \int_0^x (C_0 + C_1t + C_2t^2 + C_3t^3)dt - \\ -(\tau_1(8x^4 - 8x^2 + 1) + \tau_2(16x^5 - 20x^3 + 5x) + \\ -(\tau_3(32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1) \\ + \tau_4(64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x)). \quad (13)$$

Розв'яжемо інтеграл:

$$\int_0^x (C_0 + C_1t + C_2t^2 + C_3t^3)^2 dt = \\ = C_0^2x + C_0C_1x^2 + (C_1^2 + 2C_0C_2) \cdot \frac{x^3}{3} + (C_1C_2 + C_0C_3) \cdot \frac{x^4}{2} \\ + (C_2^2 + 2C_1C_3) \cdot \frac{x^5}{5} + C_2C_3 \frac{x^6}{3} + C_3^2 \cdot \frac{x^7}{7}.$$

Розкриємо дужки в (13) і прирівняємо коефіцієнти біля однакових степенях x .

Тепер, згідно з ітераційною схемою (6), отримаємо систему для знаходження невідомих коефіцієнтів C_0, C_1, C_2, C_3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_4^v = -\frac{(C_3^{v-1})^2}{448} \\ \tau_3^v = -\frac{C_1^{v-1}C_3^{v-1}}{96} \\ \tau_2^v = -\frac{(C_2^{v-1})^2}{90} - \frac{C_1^{v-1}C_3^{v-1}}{40} + 7\tau_4^v \\ \tau_1^v = -\frac{C_0^{v-1}C_3^{v-1}}{16} - \frac{C_1^{v-1}C_2^{v-1}}{16} + 6\tau_3^v \\ C_3^v = -\frac{(C_1^{v-1})^2}{3} - \frac{2}{3}C_0^{v-1}C_2^{v-1} + 20\tau_2^v - 56\tau_4^v \\ C_2^v = -C_0^{v-1}C_1^{v-1} + 8\tau_1^v - 18\tau_3^v \\ C_1^v = 1 - (C_0^{v-1})^2 - 5\tau_2^v + 7\tau_4^v \\ C_0^v = -\tau_1^v + \tau_3^v \end{array} \right. \quad (13)$$

Після проведення ітераційного процесу отримуємо значення невідомих коефіцієнтів C_k , де $k = \overline{0,3}$.

крок ітерації	t_4	t_3	t_2	t_1	c_3	c_2	c_1	c_0
0	0	0	0	0	1	1	1	0
1	0,0022	0,0104	0,0517	-0,125	1,2431	0,8125	1,2431	0,1146
2	0,0035	0,0161	0,0072	0,1686	0,1789	0,9166	0,927	0,1525
3	-7E-05	0,0018	0,0057	0,0445	0,3962	0,2453	1,0047	0,0462
4	0,0004	0,0041	0,0068	0,0414	0,1802	0,2104	0,9613	0,0373
5	-7E-05	0,0018	0,0033	0,0022	0,2373	0,0145	0,9814	0,0040
6	0,0001	0,0024	0,0049	0,0155	0,2152	0,0764	0,9744	0,0131
7	0,0001	0,0022	0,0045	0,0083	0,2216	0,0396	0,9768	0,0061

Табл. 1

При цьому було проведено 7 ітераційних кроків (див. Табл. 1), в результаті чого многочлен $y_3(x)$ буде мати вигляд :

$$y_3(x) = -0,00609 + 0,976834x + 0,039645x^2 - 0,22161x^3,$$

а відхилення наближеного розв'язку $y_3(x)$, знайденого за допомогою ітераційної схеми (6), від точного $y(x) = \text{th}(x)$ буде складати $\approx 0,039922$.

На Рис.1 побудовані графіки $y(x)$ та $y_3(x)$. Отже, ми бачимо, що отримали достатньо точне наближення розв'язку з мінімальним відхиленням.

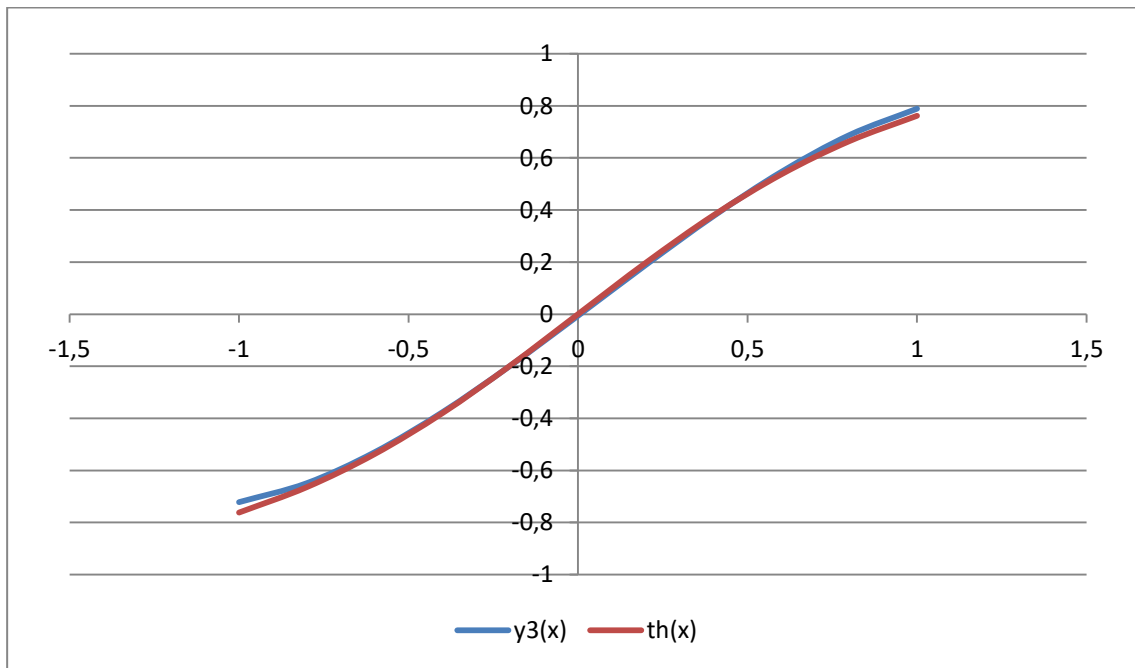


Рис. 1

Висновки.

Вивчено алгоритм наближення многочленами розв'язків інтегральних рівнянь Вольтери зі степеневими нелінійностями за допомогою ітераційних процедур. Досліджені питання про відхилення отриманого наближеного розв'язку від точного та збіжність ітераційного процесу.

Проведено обчислюваний експеримент на тестовій задачі, який підтвердив доцільність використання запропонованого алгоритму, а відхилення, знайденого розв'язку від точного, отримане в результаті проведення ітераційних процедур, склало лише $\approx 0,04$.

Список використаних джерел

1. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – К. : Наукова думка, 1986. – 544 с.
2. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений / В. К. Дзядык. – Киев : Наук. думка, 1988. – 304 с.
3. Біленко В.І., Божонок К.В., Дзядик С.Ю., Стеля О.Б. Наближення поліномами розв'язків алгебраїчно-нелінійних рівнянь математичної фізики / В.І. Біленко, К.В. Божонок, С.Ю. Дзядик, О.Б. Стеля // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2016. – Т. 13, №3. – С. 7-27.
4. Ortiz E. L. On the convergence of the tau-method for nonlinear differential equations of Riccati's type / E. L. Ortiz // Nonlinear Analysis, Theory, Methods. – 1985. – Vol. 9, No.1. – P. 53-60.

Колодуб О.І

Магістрантка спеціальності «111 Математика»

факультету математики, інформатики та фізики НПУ імені М.П.Драгоманова

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент **Боженок К.В**

АЛГОРИТМ НАБЛИЖЕННЯ ПОЛІНОМАМИ РОЗ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ АБЕЛЯ

Анотація. У даній статті досліджується питання побудови апроксимації розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння Абеля. Відповідний алгоритм розглянутий на прикладі.

Ключові слова: алгоритм наближення, диференціальне рівняння Абеля, найкраще наближення.

Abstract. This paper investigates the question of constructing an approximation of the solution of the Cauchy problem for the Abel differential equation. The corresponding algorithm is considered by example.

Keywords: approximation algorithm, Abel differential equation, best approximation.

Вступ

Інтегральні рівняння Абеля є проміжним результатом розв'язування багатьох задач у різних галузях науки, зокрема у мікроскопії, сейсмології, радіоастрономії, радарної радіотехніки, плазмової діагностики. До рівняння Абеля приводять задачі нелінійної оптики при описі надвипромінювальної лавини, теорії кінцевої пружності, нелінійної дифузії, в нелінійній хвильовій теорії.

В роботі побудований алгоритм апроксимації многочленами розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння Абеля [1]. Цей алгоритм ґрунтується на а-методі В.К. Дзядика [2, С.121] із врахуванням нелінійності розглянутого рівняння. Слід зазначити, що головними перевагами цього алгоритму над іншими методами та алгоритмами є його оптимальність в сенсі найкращих наближень та не насиченість (алгоритм без насичення точності).

Постановка задачі

Розглянемо задачу Коші для нелінійного диференціального рівняння Абеля 1-го роду виду

$$a(x)y'(x) = b(x)y(x) + c(x)y^2(x) + d(x)y^3(x) + f(x), \quad (1)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad (2)$$

де $a(x), b(x), c(x), f(x)$ – алгебраїчні многочлени степенів n_a, n_b, n_c, n_d, n_f відповідно, $x \in [-h; h]$.

Загальна схема побудови апроксимуючих многочленів

1. У відповідності до схеми а-методу розв'язування рівняння Ріккати, що була побудована в [3], перейдемо від задачі (1)-(2) до еквівалентного рівняння типу Вольтери:

$$\int_0^x a(t)y'(t)dt = \int_0^x [b(t)y(t) + c(t)y^2(t) + d(t)y^3(t) + f(t)]dt;$$

$$a(x)y(x) - a(0)y(0) - \int_0^x a'(t)y(t)dt =$$

$$= \int_0^x [b(t)y(t) + c(t)y^2(t) + d(t)y^3(t) + f(t)]dt;$$

$$a(x)y(x) = a(0)y_0 + \int_0^x [(a'(t) + b(t)y(t) + c(t)y^2(t) + d(t)y^3(t)) \cdot y(t) + f(t)]dt \quad (3)$$

2. Тепер поставимо у відповідність рівнянню (3) наступне наближене рівняння:

$$a(x)y_n(x) = a(0)y_0 + \int_0^x [(a'(t) + b(t) + c(t)y_n(t) + d(t)y_n^2(t)) \cdot y_n(t) + f(t)]dt - \varepsilon_N(x), \quad (4)$$

де $y_n(x)$ наближений розв'язок, що є алгебраїчним многочленом:

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k, \quad (5)$$

з невідомими коефіцієнтами c_k , $\varepsilon_N(x)$ – нев'язка-многочлен степеня $n + N$ виду

$$\varepsilon_N(x) = \sum_{i=1}^N \tau_{n+i} T_{n+i} \left(\frac{x}{h} \right), \quad (6)$$

Де N підбирається як

$$\max (n_a, n_b + 1, n_c + n + 1, n_d + 2n + 1, n_f + 1 - n).$$

Тут $T_k(t) = \cos k \cdot \arccost$ – многочлени Чебишова першого роду, τ_{n+i} – невідомі додаткові параметри.

3. Далі, підставляючи (5)-(6) в (4) і прирівнюючи коефіцієнти при степенях x , отримуємо систему нелінійних рівнянь з якої знаходимо невідомі c_k ($k = \overline{0, n}$)

та допоміжні параметри $\tau_{n+i} (i = \overline{1, N})$. В силу нелінійності отриманої системи можна побудувати ітераційні схема розв'язування системи, але ми в нашій роботі будемо для цієї цілі використовувати СКА Maple.

4. Для випадку, коли в (1) x належить довільному проміжку $[x_0; x_1]$ і початкова умова (2) переписується $y(x_0) = y_0$, то будемо мати наступне наближене рівняння (див. [4]):

$$a(x)y_n(x) = a(x_0)y_0 + \int_{x_0}^x [(a'(t) + b(t) + c(t)y_n(t) + d(t)y_n^2(t)) \cdot y_n(t) + f(t)] dt - \varepsilon_N(x),$$

де $y_n(x)$ визначається (5), а нев'язка-многочлен $\varepsilon_N(x)$ записується через многочлени Чебишова першого роду, що зміщені на $[x_0; x_1]$

$$T_{n+i} \left(\frac{2x - (x_0 + x_1)}{x_1 - x_0} \right) = \cos \left((n + i) \arccos \left(\frac{2x - (x_0 + x_1)}{x_1 - x_0} \right) \right).$$

Приклад.

Нехай задана задача Коші для рівняння Абеля. Для рівняння

$$xy'(x) = x^3y^3 + (x - 1)y, \quad x \in \left[1; \frac{6}{5}\right], \quad (7)$$

задана початкова умова

$$y(1) = 0. \quad (8)$$

Це рівняння заміною $t = y \cdot x$ можна звести до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними. Дійсно,

$$t' = y'x + y, \quad xy' = t' - y \quad \Rightarrow$$

$$t' - y = t^3 + t - y;$$

$$t' = t^3 + t ;$$

$$\int \frac{dt}{t(t^2 + 1)} = \int dx ;$$

$$\int \frac{dt}{t} - \int \frac{tdt}{t^2 + 1} = \int dx ;$$

$$\ln|t| - \frac{1}{2} \ln|t^2 + 1| = x + C ;$$

$$\ln \left| \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} \right| = x + C;$$

$$\frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} = e^x \cdot C;$$

$$\frac{yx}{\sqrt{yx^2 + 1}} = e^x \cdot C.$$

За початкової умови (8)

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}e}.$$

Отже, точним розв'язком задачі (7)-(8) буде

$$\frac{yx}{\sqrt{y^2x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}e} \cdot e^x.$$

Наближений розв'язок на $[1; 6/5]$ будемо шукати у вигляді полінома $y_1(x) = c_0 + c_1x$.

Відповідно до загальної схеми алгоритму маємо:

1. Наближене інтегро-функціональне рівняння (4)

$$xy_1(x) = 1^2 + \int_1^x [(1 + (t - 1) + t^3y_1^2(t))y_1(t)]dt - \varepsilon_N(x),$$

де $N = \max(n_a = 1, n_b + 1 = 1 + 1 = 2, n_c + n + 1 = 0 + 1 + 1 = 2, n_d + 2n + 1 = 3 + 2 + 1 = 6, n_f + 1 - n = 0 + 1 - 1 = 0) = 6$, отже $n + N = 1 + 6 = 7$.

2. Многочлен-нев'язка $\varepsilon_N(x)$ має вид:

$$\varepsilon_N(x) = \tau_2 T_2(10x - 11) + \tau_3 T_3(10x - 11) + \tau_4 T_4(10x - 11) + \tau_5 T_5(10x - 11) + \tau_6 T_6(10x - 11) + \tau_7 T_7(10x - 11),$$

де многочлени Чебишова змістили на відрізок $[1; 6/5]$:

3. Після усіх підстановок, маємо:

$$\begin{aligned} x(c_0 + c_1(x)) = & \\ = 1 + \int_1^x [(1 + (t - 1) + t^3(c_0 + c_1x)^2)(c_0 + c_1x)]dt - \tau_2(241 & \\ + 200x^2 - 440x) - \tau_3(4000x^3 - 13200x^2 + 14490x - 5291) & \\ - \tau_4(80000x^4 - 352000x^3 + 580000x^2 - 424160x + 116161) & \\ - \tau_5(1600000x^5 - 8800000x^4 + 19340000x^3 - 21230000x^2 & \\ + 11640250x - 2550251) - \tau_6(32000000x^6 - 211200000x^5 & \\ + 580320000x^4 - 849728000x^3 + 699285000x^2 - 306666360x & \\ + 55989361) - \tau_7(640000000x^7 - 4928000000x^6 & \\ + 16251200000x^5 - 29752800000x^4 + 32660376000x^3 & \\ - 21496367200x^2 + 7854806890x - 1229215691). & \end{aligned}$$

4. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , отримаємо систему нелінійних рівнянь відносно невідомих $c_0, c_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6, \tau_7$.

Робимо наступну заміну: $c_0 = c, c_1 = s, \tau_2 = r, \tau_3 = \tau, \tau_4 = \xi, \tau_5 = \eta, \tau_6 = m, \tau_7 = p$. Розв'язуючи цю систему за допомогою СКМ Maple, отримуємо:
restart;

$$eq1 := \frac{s^3}{7} - 640000000p = 0;$$

$$\frac{1}{7} s^3 - 640000000p = 0$$

$$eq2 := \frac{3 \cdot c \cdot s^2}{6} - 32000000 m + 4928000000p = 0;$$

$$\frac{1}{2} c s^2 - 32000000m + 4928000000p = 0$$

$$eq3 := \frac{3 \cdot c^2 \cdot s}{5} - 1600000 \eta + 211200000 m - 16251200000p = 0;$$

$$\frac{3}{5} c^2 s - 1600000 \eta + 211200000m - 16251200000p = 0$$

$$eq4 := \frac{c^3}{4} - 80000 \xi + 8800000 \eta - 580320000 m + 29752800000p = 0;$$

$$\frac{1}{4} c^3 - 80000 \xi + 8800000 \eta - 580320000m + 29752800000p = 0$$

$$eq5 := \frac{s}{3} - 4000 \cdot \tau + 352000 \xi - 19340000 \eta + 849728000 m - 32660376000p = 0;$$

$$\frac{1}{3} s - 4000 \tau + 352000 \xi - 19340000 \eta + 849728000m - 32660376000p = 0$$

$$eq6 := \frac{c}{2} - 200 \cdot r + 13200 \cdot \tau - 580000 \xi + 21230000 \eta - 699285000 m + 21496367200p = s;$$

$$\frac{1}{2} c - 200 r + 13200 \tau - 580000 \xi + 21230000 \eta - 699285000m + 21496367200p = s$$

$$eq7 := 440 \cdot r - 14490 \cdot \tau + 424160 \xi - 11640250 \eta + 306666360 m - 7854806890p = c;$$

$$440 r - 14490 \tau + 424160 \xi - 11640250 \eta + 306666360m - 7854806890p = c$$

$$eq8 := 1 - \frac{c}{2} - \frac{s}{3} - \frac{c^3}{4} - \frac{3 \cdot c^2 \cdot s}{5} - \frac{3 \cdot c \cdot s^2}{6} - 241 \cdot r - \frac{s^3}{7} + 5291 \cdot \tau - 116161 \cdot \xi + 2550251 \cdot \eta - 55989361 \cdot m + 1229215691p = 0;$$

$$1 - \frac{1}{2}c - \frac{1}{3}s - \frac{1}{4}c^3 - \frac{3}{5}c^2s - \frac{1}{2}cs^2 - 241r - \frac{1}{7}s^3 + 5291\tau - 116161\xi + 2550251\eta - 55989361m + 1229215691p = 0$$

`_EnvExplicit := true :`

`rsol := fsolve({eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6, eq7, eq8}, {c, s, r, \tau, \xi, \eta, m, p});`

$$\{c = -1.332297291, \eta = 0.00001440025691, m = 3.04051217710^{-7}, p = 2.68380529410^{-9}, r = 0.04675412575, s = 2.290918678\tau = 0.005730598361, \xi = 0.000369184600\}$$

`c0 := subs(rsol, c);`

$$-1.332297291$$

`c1 := subs(rsol, s);`

$$2.290918678$$

`y2 := c0 + c1 \cdot x;`

$$-1.332297291 + 2.290918678x$$

Отже, маємо такі результати:

$$c_0 \approx -1.332; \quad c_1 \approx 2.291; \quad \tau_2 \approx 0.0467; \quad \tau_3 \approx 0.0057; \\ \tau_4 \approx 0.00036; \quad \tau_5 \approx 0.000014; \quad \tau_6 \approx 3.0405 \cdot 10^{-7}, \\ \tau_7 \approx 2.6838 \cdot 10^{-9}.$$

Звідси

$$y_1(x) = -1.332297291 + 2.290918678x$$

– наближений розв'язок задачі (7)-(8), а параметри $\tau_i (i = \overline{2, 7})$ визначають нев'язку $\varepsilon_N(x)$.

Розв'язок рівняння (7) з початковою умовою (8) можна графічно проілюструвати: на Рис. 1 крива синього кольору – точний розв'язок задачі (7)-(8), крива червоного кольору – наближений розв'язок (7)-(8).

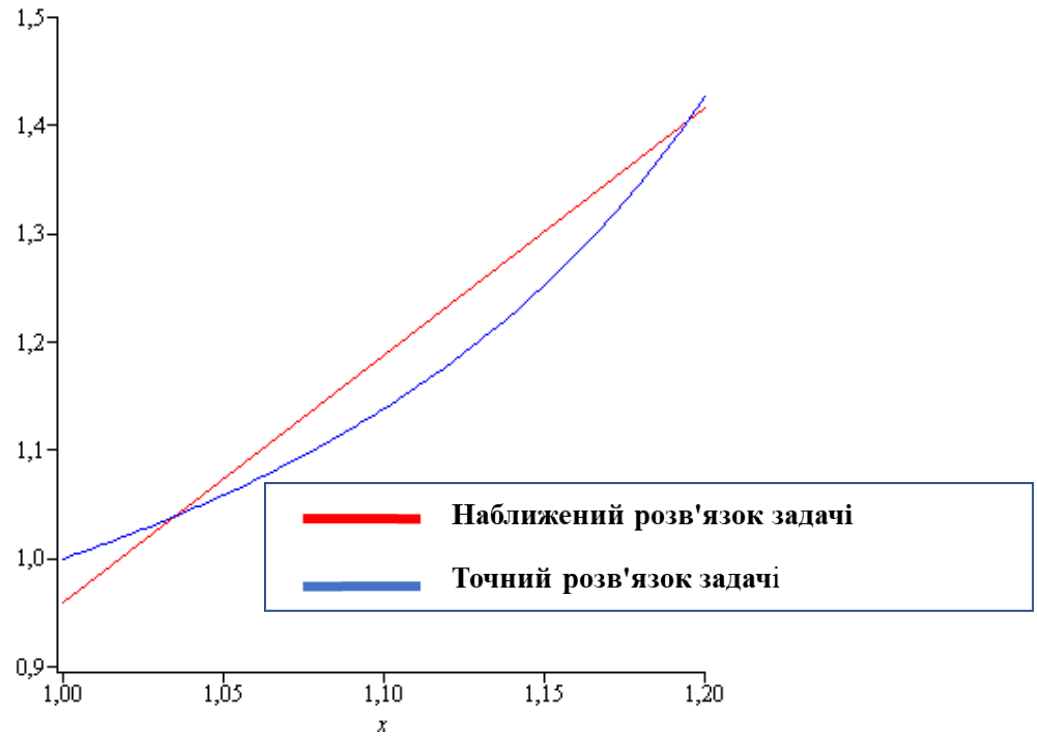


Рис.1

Висновки.

Таким чином, результати обчислювального експерименту дають підстави зробити висновок про можливість запропонованого алгоритму добре доповнити існуючі чисельні методи розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння Абеля.

При цьому ми отримуємо наближений розв'язок в аналітичному вигляді, який, насправді, буде близький до найкращого наближення в рівномірній метриці.

Список використаної літератури

1. Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям: Приложения в механике, точные решения / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. – М.: Физматлит, 1993. – 464 с.
2. Дзядык В.К. Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений / В. К. Дзядык. – Киев : Наук. думка, 1988. – 304с.
3. Біленко В.І. А-метод решения нелинейных дифференциальных уравнений Риккати / В.І. Біленко // В кн.: «Теория приближ. функций и ее приложения». – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 5-13.
4. Біленко В.І., Боженок К.В., Дзядик С.Ю., Стеля О.Б. Наближення поліномами розв'язків алгебраїчно-нелінійних рівнянь математичної фізики // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2016. – Т. 13, №3. – С. 7-27.

Нікорак О. О.

студентка спеціальності «Середня освіта (математика)»

факультету математики, інформатики та фізики НПУ імені М.П. Драгоманова

Наукові керівники: доктор фіз.-мат. наук, професор **Працьовитий М.В.**

доктор філософії, викладач **Ратушняк С.П.**

ОДНА ФРАКТАЛЬНА ФУНКЦІЯ ІНВЕРСНОГО ТИПУ, ВИЗНАЧЕНА У ТЕРМІНАХ D_2 -ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ ОДИНИЧНОГО ВІДРІЗКА

Анотація. Для двосимвольного ланцюгового зображення з ненульовою надлишковістю D_2 -зображення чисел вводиться функція f , D_2 -цифри якої є залежними та інверсними до D_2 -цифр аргумента. Для функції f описано властивості множин рівнів та її множини значень.

Ключові слова: фрактальна функція, двосимвольна система кодування, ланцюгові дроби, дроби Данжуа, D_2 -зображення, інверсор цифр зображення.

Abstract. We consider a D_2 -representation of numbers, a two-symbol continued fractions representation with a non-zero redundancy. The function f defined as the D_2 -digits of values of function are dependent and inverse to the D_2 -digits of the argument. In the paper we described the properties of level sets of function and its set of values.

Key words: fractal function, two-symbol encoding system, continued fraction, Denjoy's fraction, D_2 -representation, inversor of digits of representation.

Системи зображення дробової частини дійсного числа посіли в сучасній конструктивній теорії функцій зі складною локальною будовою почесне, якщо не перше, то одне з перших місць [11,12,17]. Вони стали і інструментом і засобом дослідження та задання функцій та мір, що наділені фрактальними властивостями. Пошук нових засобів і вдосконалення вже існуючих збагачує не лише теорію фракталів, а й теорію чисел. Дослідження різноманітних систем числення служать розвитку математики в цілому. На сьогодні відомо більше десяти різних двосимвольних систем зображень, геометрія і властивості яких ще мало вивчені [12]. До них відносяться кодування чисел ланцюговими дробами засобами скінченного алфавіту [5,9]. Одному з таких зображень та його застосуванню присвячена дана стаття.

Найпростішим прикладом сингулярної функції (неперервної функції, відмінної від константи, похідна якої майже скрізь у розумінні міри Лебега рівна нулю), яка є представником цілого класу сингулярних функцій, що утворюють множину другої категорії Бера серед неперервних та немонотонних функцій на $[0; 1]$, є інверсор цифр Q_2 -зображення чисел [15]. Аналітичне задання цієї

функції ґрунтується Q_2 -розкладах чисел одиничного відрізка і взаємозв'язку Q_2 -цифр аргумента з Q_2 -цифрами значення функції, а саме:

$$y = I(x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_2}) = \Delta_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2] \dots [1-\alpha_n] \dots}^{Q_2}.$$

Доведено, що інверсор Q_2 -цифр є неперервною строго спадною функцією, яка при $q_0 = \frac{1}{2}$ є лінійною, а при $q_0 \neq \frac{1}{2}$ – сингулярною. Цікавим є питання, аналога інверсора для інших двосимвольних систем зображення, зокрема для зображення чисел дробами Данжуа.

Нагадаємо, що будь-яке дійсне число можна подати у вигляді елементарного ланцюгового дроби [8,18]. Це вираз виду

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots], \text{ де } a_0 \in \mathbb{Z}, a_j \in \mathbb{N}.$$

У 1942 р. в своїй роботі [4] французький математик А.Данжуа встановив, що кожне дійсне число x розкладається у скінченний або нескінченний ланцюговий дріб, елементами якого є лише 0 та 1, тобто у дріб виду

$$x = [d_0; d_1, d_2, d_3, \dots, d_n, \dots], \text{ де } d_j \in \{0; 1\}. \quad (1)$$

Вираз (1) називають *канонічним ланцюговим дробом*, або *ланцюговим дробом Данжуа*.

На основі розкладу числа в ланцюговий дріб Данжуа була створена топологічно-метрична теорія зображення чисел дробами Данжуа, так званого D_2 -зображення [4,5]. Нагадаємо його основні положення.

Нехай $A = \{0; 1\}$ – двосимвольний алфавіт, $L = A \times A \times \dots$ – простір послідовностей елементів алфавіту (послідовностей нулів та одиниць). Покладемо $\frac{1}{0} \equiv \infty, \frac{1}{\infty} \equiv 0$. Тоді для довільного числа з відрізка $[0; 1]$ ($d_0 \equiv 0$) існує послідовність $(d_n) \in L, d_1 = 1$ така, що

$$x = \frac{1}{1 + \frac{1}{d_2 + \frac{1}{d_3 + \dots}}} \equiv [1, d_2, d_3, \dots, d_n, \dots]^{D_2}. \quad (2)$$

Ланцюговий дріб (2) називають D_2 -представленням числа $x \in [0; 1]$, а скорочений запис $[1, d_2, d_3, \dots, d_n, \dots]^{D_2}$ – його D_2 -зображенням. Введене таким чином зображення є двосимвольним ланцюговим зображенням дробової частини числа з ненульовою надлишковістю. Оскільки припис нулів не змінює значення числа, тобто виконується рівність $[1, 0, \dots, 0, d_2, d_3, \dots, d_n, \dots]^{D_2} = [1, d_2, 0, d_3, \dots, d_n, \dots]^{D_2}$, а тому число має континуальну кількість зображень, то домовившись не використовувати більше одного нуля підряд в зображенні, досягнемо ненульової надлишковості D_2 -зображення.

Кожне раціональне число, аналогічно до елементарних ланцюгових дробів, має два зображення, а саме:

$$[1, d_2, d_3, \dots, d_n, 1, 0, 1]^{D_2} = x = [1, d_2, d_3, \dots, d_n, 1, 1]^{D_2}.$$

Множина таких чисел називається множиною D_2 -бінарних чисел, решта, ті що мають єдине зображення, – множиною D_2 -унарних чисел.

Розглянемо геометрію ланцюгового D_2 -зображення чисел.

Означення 1.[12] Циліндром рангу t з основою $1c_2c_3 \dots c_m$ ланцюгового D_2 -зображення чисел називається множина:

$$\Delta_{1c_2c_3 \dots c_m}^{D_2} = \{x \in (0; 1] \mid x = [1, d_2, d_3, \dots, d_m, \dots]^{D_2}, \text{ де } d_i(x) = c_i, i = \overline{2, m}\}.$$

Послідовність підхідних дробів $\frac{p_n}{q_n}$ елементарного ланцюгового дробу є підпослідовністю підхідних дробів $C_n = [1, d_2, \dots, d_n]^{D_2}$ ланцюгового дробу Данжуа. Закони утворення підхідних дробів для елементарних ланцюгових дробів, зокрема для дробів Данжуа виглядають наступним чином:

$$\begin{cases} p_0 = d_0, p_{-1} = 1, p_n = d_n p_{n-1} + p_{n-2}; \\ q_0 = 1, q_{-1} = 0, q_n = d_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Розглянемо основні властивості циліндрів D_2 – зображення.

Властивість 1 [12]. Циліндр $\Delta_{1c_2 \dots c_m}^{D_2}$ є відрізком, причому:

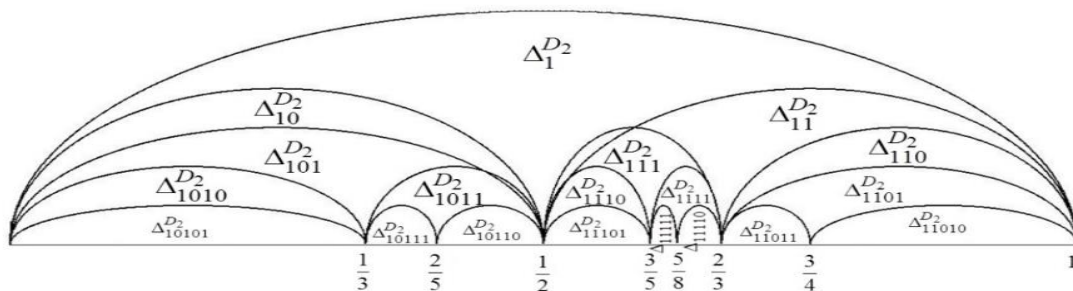
1) Якщо t – парне (непарне) і $c_m = 1$, то: 2) Якщо t – парне (непарне) і $c_m = 0$, то:

$[1, c_2, \dots, c_{m-1}]^{D_2}$ – правий (лівий) кінець циліндра; $[1, c_2, \dots, c_m]^{D_2}$ – правий (лівий) кінець циліндра;

$[1, c_2, \dots, c_m]^{D_2}$ – лівий (правий) кінець циліндра; $[1, c_2, \dots, c_m, 1]^{D_2}$ – лівий (правий) кінець циліндра.

Властивість 2. [12] Діаметр (довжина) циліндра $\Delta_{1c_2 \dots c_m}^{D_2}$ виражається формулою:

$$|\Delta_{1c_2 \dots c_m}^{D_2}| = \begin{cases} |[1, c_2, \dots, c_m]^{D_2} - [1, c_2, \dots, c_{m-1}]^{D_2}|, & c_m = 1, \\ |[1, c_2, \dots, c_m]^{D_2} - [1, c_2, \dots, c_m, 1]^{D_2}|, & c_m = 0. \end{cases}$$



ОБ'ЄКТ ДОСЛІДЖЕННЯ

Основним об'єктом дослідження виступає функція f , означена рівністю

$$f(x = [1, d_2, d_3, \dots, d_n, \dots]^{D_2}) = [1, g_2, g_3, \dots, g_n, \dots]^{D_2}, \text{ де} \quad (3)$$

$$g_i = \begin{cases} 1 - d_i, & \text{якщо } g_{i-1} = 1 \\ 1, & \text{якщо } g_{i-1} = 0 \end{cases}, i = 2, 3, \dots$$

Функція f є некоректно означеною для D_2 -бінарних чисел, оскільки виконується нерівність

$$f([1, 0, 1, 0, 1]^{D_2}) = [1, 1, 0, 1, 0]^{D_2} \neq f([1, 0, 1, 1]^{D_2}) = [1, 1, 0, 1]^{D_2}.$$

Тому задля коректності означення домовимось використовувати лише одне із зображень, а саме $[1, d_2, d_3, \dots, d_n, 1, 1]^{D_2}$.

Нас цікавлять структурні, варіаційні, диференціальні властивості функції f .

Зауваження. Для цифр g_2, g_3, \dots, g_n значення $[1, g_2, g_3, \dots, g_n, \dots]^{D_2}$ функції f справедливі рівності

$$g_i = 1 - d_i g_{i-1}, \quad i \in 2, 3, \dots \quad (4)$$

Справді, оскільки i -та цифра значення функції набуває значення 0, коли $d_i = 1 = g_{i-1}$ і 1, коли $d_i = 0 \neq g_{i-1}$ або $g_{i-1} = 0$, то вона може бути обчислена за формулою (4). Тобто, функція може бути означена наступним чином

$$f(x = [1, d_2, d_3, \dots, d_n, \dots]^{D_2}) = [1, 1 - g_2, 1 - g_2 d_3, \dots, 1 - g_{n-1} d_n, \dots]^{D_2}. \quad (5)$$

Надалі будемо користуватись як рівністю (3), так і (5) залежно від того, яка наразі буде зручнішою.

Теорема 1. Функція f є розривною на множині D_2 -бінарних чисел і неперервною в решті точок області визначення.

Доведення. Оскільки функція f є некоректно означеною на множині D_2 -бінарних точок, то з цього слідує її розривність. Доведемо її неперервність для D_2 -унарних чисел. Для цього досить показати, що

$$\lim_{x' \rightarrow x_0} f(x') = f(x_0) \text{ або } \lim_{x' \rightarrow x_0} |f(x') - f(x_0)| = 0.$$

Нехай задано D_2 -унарне число $x_0 = [1, d_2, d_3, \dots, d_n, d_{n+1}, \dots]^{D_2}$ і $x' \neq x_0$. Тоді існує такий номер $n \in \mathbb{N}$, що $d_n(x) \neq d_n(x')$, $d_i(x') = d_i(x_0)$ для $i = \overline{1, n-1}$, тобто $x' = [1, d_2, d_3, \dots, d'_n, d'_{n+1}, \dots]^{D_2}$. Тоді умова $x' \rightarrow x_0$ рівносильна умові $n \rightarrow \infty$. Тому враховуючи закони утворення підхідних дробів, легко встановити, що $\lim_{x' \rightarrow x_0} f(x') = f(x_0)$. А отже, функція f є неперервною на множині D_2 -унарних чисел. *Теорему доведено.*

СТРУКТУРНІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ f

Теорема 2. Множина E_f значень функції f співпадає з множиною канторівського типу $C[D_2, \overline{111}, \overline{00}]$.

Доведення. Для доведення теореми достатньо показати, що виконуються включення $E_f \subset C[D_2, \overline{111}, \overline{00}]$ та $C[D_2, \overline{111}, \overline{00}] \subset E_f$ одночасно.

1. Розглянемо число $y \in E_f$: $y = [1, g_2, g_3, \dots]^{D_2}$. Покажемо, що $y \in C$. Тобто у зображенні числа y не існує три одиниці підряд і два нулі. Згідно з

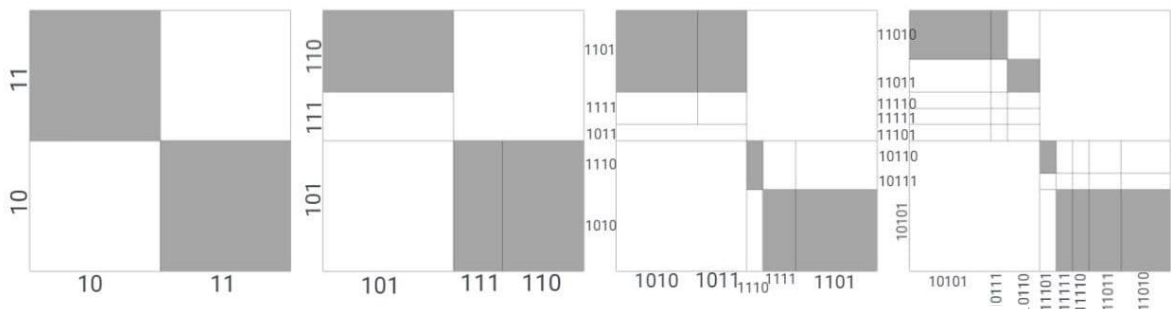
означенням функції f дві одиниці підряд можуть з'явитися серед цифр значення функції лише, коли відповідні цифри аргумента 10. Оскільки наступна цифра аргумента в силу домовленості буде 1, то їй відповідна цифра значення функції буде 0. Двох нулів підряд серед цифр аргумента немає згідно означення функції. Цим самим, в силу довільності u показуємо, що $E_f \subset C[D_2, \overline{111}]$.

2. Нехай маємо довільне число $y = [1, c_2, c_3, \dots]^{D_2} \in C[D_2, \overline{111}]$. Покажемо, що воно є значенням деякого $x = [1, d_2, d_3, \dots]^{D_2}, x \in (0; 1]$ при перетворенні f . Тобто, користуючись рівністю (5), отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} c_2 = 1 - d_2 1, \\ c_3 = 1 - d_3 c_2, \\ c_4 = 1 - d_4 c_3, \\ c_5 = 1 - d_5 c_4, \\ \dots \dots \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_2 = 1 - c_2, \\ d_3 c_2 = 1 - c_3, \\ d_4 c_3 = 1 - c_4, \\ d_5 c_4 = 1 - c_5, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Розглянувши усі можливі варіанти, легко показати, що система сумісна і невизначена. Але серед розв'язків існують такі числа, зображення яких не має два нулі підряд, що й показує, що y є образом деякого $x \in (0; 1]$. А тому $C[D_2, \overline{111}] \subset E_f$.

З того, що $E_f \subset C[D_2, \overline{111}]$ та $C[D_2, \overline{111}] \subset E_f$ випливає, що $C[D_2, \overline{111}] = E_f$. Теорему доведено.



На рисунку представлено наближення до графіка функції f на циліндрах 2, 3, 4, 5 – го рангів.

МНОЖИНИ РІВНІВ ФУНКЦІЇ f

Нагадаємо означення множини рівня функції.

Означення 2. Множиною рівня $y_0 \in E_f$ функції f , означеної на E_f називається множина виду $f^{-1}(y_0) = \{x \in E_f: f(x) = y_0\}$.

Оскільки функція f множиною значень має множину канторівського типу, то її множина рівня може бути континуальною.

Розглянемо рівень $y_0 = [1, (1,0)]^{D_2}$. Використовуючи рівність (4) запишемо систему рівнянь, що визначатиме x . Нехай x має D_2 -зображення $[1, d_2, d_3, \dots, d_n, \dots]^{D_2}$, тоді

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = d_1, \\ 1 = 1 - 1d_2; \\ 0 = 1 - 1d_3; \\ 1 = 1 - 0d_4; \\ 0 = 1 - 1d_5; \\ 1 = 1 - 0d_6; \\ 0 = 1 - 1d_7; \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \text{ тобто } \left\{ \begin{array}{l} d_1 = 1; \\ d_2 = 0; \\ d_3 = 1; \\ d_4 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}; \\ d_5 = 1; \\ d_6 = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}; \\ d_7 = 1; \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Отримуємо, що $f^{-1}(y) = \{x: x = [1,0,1, a_1, 1, a_2, \dots, 1, a_i, 1, \dots]^{D_2}, \text{ де } a_i \in A\}$. Тоді з того, що між $f^{-1}(y)$ і одиничним відрізком можна встановити бієкцію

$$g(x): \begin{cases} \alpha_n(t) = 0, \text{ якщо } a_i = 0; \\ \alpha_n(t) = 1, \text{ якщо } a_i = 1, \end{cases} \text{ де } t = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots}^2 \in [0; 1],$$

то потужності цих множин співпадають, а тому множина $f^{-1}(y)$ континуальна.

Лема 1. Множини рівнів (6) і (7)

$$f^{-1}(y_1 = [1, g_2, g_3, \dots, g_n, (1,0)]^{D_2}) = \{x: f(x) = y_1, \text{ де } g_n \in A\} \quad (6)$$

$$f^{-1}(y_2 = [1, g_2, g_3, \dots, g_n, (0,1)]^{D_2}) = \{x: f(x) = y_2, \text{ де } g_n \in A\}. \quad (7)$$

є континуальними.

Доведення. Очевидно, множина рівня y_1 складається з точок виду

$$x = [1, d_2, d_3, \dots, d_n, 1, d_{n+2}, 1, d_{n+4}, \dots, 1, d_{n+2i}, 1, \dots]^{D_2},$$

де $g_n = 1 - d_n g_{n-1}$, $n \in A$. Для того, щоб показати континуальність $f^{-1}(y_1)$, необхідно встановити бієкцію між множиною рівня y_1 і відрізком $[0; 1]$. Таким може бути перетворення:

$$g(x) = \begin{cases} \alpha_k(t) = 0, \text{ якщо } d_{n+2k} = 0; \\ \alpha_k(t) = 1, \text{ якщо } d_{n+2k} = 1, \end{cases} \text{ де } t = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots}^2 \in [0; 1].$$

Отже, множина $f^{-1}(y_1)$ – континуальна.

Легко бачити, що:

$$f^{-1}(y_2) = f^{-1}([1, g_2, g_3, \dots, g_n, 0, (1,0), 1]^{D_2}).$$

Тому $f^{-1}(y_2)$ є частинним випадком $f^{-1}(y_1)$, а тому і множина рівня $f^{-1}(y_2)$ є континуальною. Що і треба було довести. *Лему доведено.*

Теорема 2. Множини рівнів функції f можуть бути як скінченні, так і континуальні, причому останні тоді і тільки тоді, коли комбінація $(1,0,1,0)$ з'являється нескінченну кількість разів.

Доведення. Для доведення першої частини, наведемо приклади скінченних множин рівнів. Розглянемо $y_3 = [1, (101)]^{D_2}$. Тоді елементи множини рівня y_3 знаходяться з системи:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = d_1; \\ 1 = 1 - 1d_2; \\ 0 = 1 - 1d_3; \\ 1 = 1 - 0d_4; \\ 1 = 1 - 1d_5; \\ 0 = 1 - 1d_6; \\ 1 = 1 - 0d_7; \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d_1 = 1; \\ d_2 = 0; \\ d_3 = 1; \\ d_4 = \begin{cases} 0; \\ 1; \end{cases} \\ d_5 = 0; \\ d_6 = 1; \\ d_7 = \begin{cases} 0; \\ 1; \end{cases} \\ \dots \dots \dots \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d_1 = 1; \\ d_2 = 0; \\ d_3 = 1; \\ d_4 = 1; \\ d_5 = 0; \\ d_6 = 1; \\ d_7 = 1; \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Отримали одноточкову множину рівня $f^{-1}(y_3) = \{x: x = [1, (0,1,1)]^{D_2}\}$. Наявність континуального рівня показує лема 1. Тоді дійсно, множини рівнів функції f можуть бути як скінченні, так і континуальні.

Покажемо, що рівень, у D_2 -зображенні якого є нескінченна кількість комбінацій $(1,0,1,0)$ є континуальним. Доведення першої частини критерію обґрунтовує лема 1. Покажемо що й обернене твердження є справедливим, тобто, якщо множина рівня є континуальною, то у D_2 -зображенні рівня комбінація $(1,0,1,0)$ зустрічається нескінченну кількість раз.

Нехай множина рівня $y = [1, g_2, g_3, \dots, g_n]^{D_2}$ є континуальною. Тоді, починаючи з деякого номера n , цифри g_n є образом двох значень цифр аргумента d_n :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_n = 1 - g_{n-1}d_n; \\ g_{n+1} = 1 - g_n d_{n+1}; \\ g_{n+2} = 1 - g_{n+1}d_{n+2}; \\ g_{n+3} = 1 - g_{n+2}d_{n+3}; \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Це буде тоді, коли в системі лінійних рівнянь значення виразів $1 - g_{i-1}d_i$ не залежать від значення d_i , а це можливо у тому випадку, коли $g_{i-1} = 0$. Оскільки у зображенні значення функції не може бути двох нулів підряд, тому найбільш «продуктивною» послідовністю буде $(1,0,1,0)$. Якщо множина рівня континуальна, то така комбінація має зустрічатися нескінченну кількість раз. Що і треба було довести. *Теорема доведена.*

Список використаної літератури

1. *Brown G.* Metrical theory for farey continued fractions // *Osaka J. Math.* – 1996. – Vol. 33.no. 2. – Pp. 951 – 970.
2. *Cusick T. W.* Hausdorff dimension of sets of continued fractions // *Quan. J. Math. Oxford.* – 1990. – Vol. 41, no. 2. – Pp. 277–286.
3. *Dajani K., Kraaikamp C.* The mother of all continued fractions // *Colloq. Math.* – 2000. – 84/85. part 1. – P.109-123.
4. *Denjoy A.* Complement a la notice publiee en 1934 sur les travaux scientifiques de M. Arnaud Denjoy, Hermann, Paris, 1942.

5. *Iosifescu M., Kraaikamp C.* Metric properties of Denjoy's canonical continued fraction expansion // *Tokyo J. Math.* – 31 (2008). – no. 2. – P. 495-510.
6. *Iosifescu M., Kraaikamp C.* On Denjoy's canonical continued fraction expansion // *Osaka J. Math.* – 40 (2003). – no. 1. – P. 235-244.
7. *Pratsiovytyi M., Kyurchev D.* Properties of the distribution of the random variable defined by A_2 -continued fraction with independent elements // *Random Oper. Stochastic Equations*, 2009, Vol. 17., no. 1. — P.91-101.
8. *Джоунс У.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения: Пер. с англ. – Москва: Мир, 1985. – 416 с.
9. *Дмитренко С.О., Кюрчев Д.В., Працьовитий М.В.* Ланцюгове \hat{A}_2 -зображення дійсних чисел // *Український математичний журнал.* – 2009, том 61, № 4. – С.452-463.
10. *Постников А.Г.* Арифметическое медерирование случайных процессов // *Труды Мат. ин-та им В. А. Стеклова АН СССР.* – 1960. – Т. 57. – С. 3–84.
11. *Працьовитий М.В.* Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. – Київ: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. – 68 с.
12. *Працьовитий М.В.* Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. – Київ: Наукова думка, 2020 (рукопис).
13. *Працьовитий М.В.* Сингулярність розподілів випадкових величин, заданих розподілами елементів свого ланцюгового зображення // *Укр. мат. журн.* — 1996. — **48**, № 8. — С.1086-1095.
14. *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
15. *Працьовитий М.В., Скрипник С.О., Чуйков А.С.* Ланцюгове D_2 -зображення дійсних чисел і деякі функції, з ним пов'язані // *Збірник праць Інституту математики НАН України* 2019, т. 16, № 3, - С. 101-114.
16. *Працьовитий М.В., Чуйков А.С.* Найпростіші функції, пов'язані з оператором лівостороннього зсуву елементів ланцюгового зображення чисел // *Збірник праць Інституту математики НАН України* 2016, т. 13, № 3. С. 158 – 173.
17. *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наукова думка, 1992. — 208с.
18. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 116 с.

Нитник А.С.

магістрантка спеціальності «Математика (фінансова математика)»
факультету математики, інформатики та фізики НПУ імені М.П.Драгоманова
Науковий керівник: канд.фіз.-мат. наук, доцент **Гончаренко Я. В.**

МОДЕЛЮВАННЯ ЧАСОВИХ РЯДІВ ЗА ДОПОМОГОЮ МОДИФІКАЦІЙ Q-ЗОБРАЖЕНЬ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

Анотація. Запропоновано і обґрунтовано коректність аналітичного задання функції з складними локальними властивостями, заданої за допомогою модифікацій Q-зображення дійсних чисел.

Ключові слова: часовий ряд, модель, Q-зображення дійсних чисел.

Abstract. The correctness of the analytical task of a function with complex local properties given by modifications of the Q-image of real numbers is proposed and substantiated.

Keywords: time series, model, Q-images of real numbers.

Вступ

На сьогодні аналіз часових рядів з складною локальною поведінкою є актуальною проблемою, вирішенню якої присвячено велику кількість досліджень. Зокрема для вирішення задачі перед прогнозного аналізу та моделювання часових рядів застосовуються методи R/S-аналізу, спектрального, кореляційного та регресійного аналізу, авторегресійні моделі, моелі, що передбачають різні типи згладжування [2,3].

В даній роботі пропонується застосувати різні нетипові системи числення для задання функції з поганими локальними властивостями, яка може бути математичною моделлю певного типу часових рядів. Зауважимо, що ряди такого типу часто виникають в задачах фінансового аналізу.

Виклад основного матеріалу дослідження:

Нехай дано деякий дискретний часовий ряд $s_i = s(t_i)$, $i = \overline{0, n}$, поданий у табл. 1, де t_i – час, а s_i – деякі числові дані на момент t_i .

t_i	s_i
t_1	s_1
t_2	s_2
...	...
t_n	s_n

Табл.1

Основними припущеннями для моделювання наступні: графік функції, яка буде моделлю зміни величини, значення якої задає часовий ряд, має само афінні властивості; функція є неперервною і немонотонною на області визначення.

Поставимо перед собою завдання знайти аналітичне задання цієї функції.

Для цього спочатку нормалізуємо t_i та s_i на одиничний відрізок. Отримаємо нові $x_i \in [0,1]$ та $y_i \in [0,1]$.

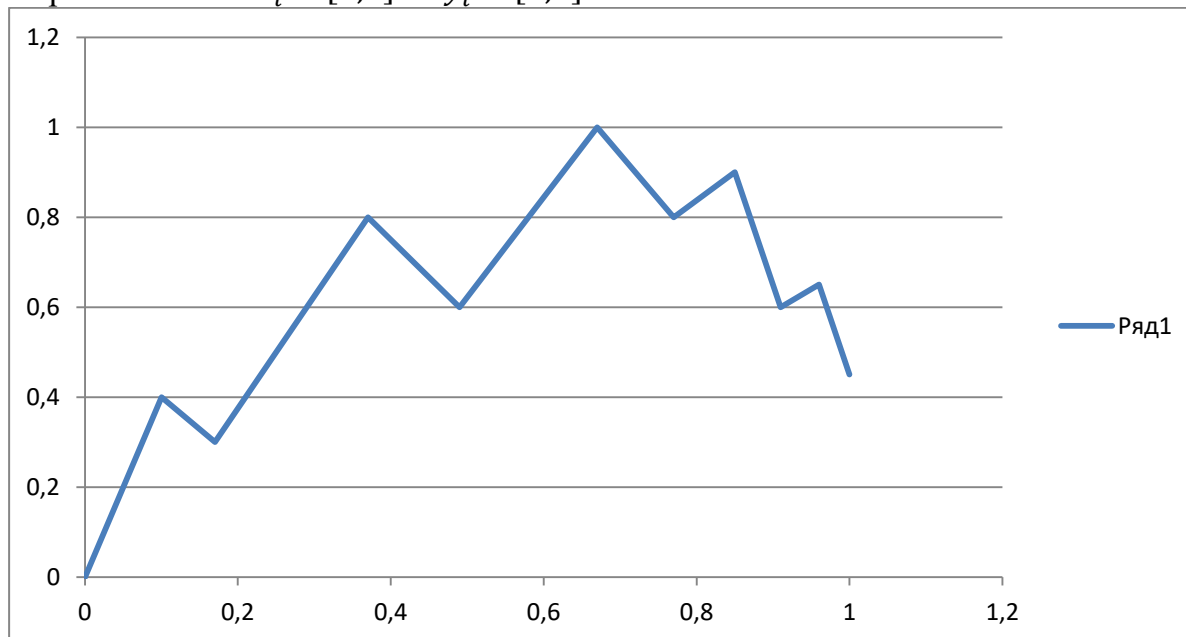


Рис.1

Розглянемо графік функції – множини точок G . Спроектуємо точки з координатами $A_i(x_i, y_i), i = \overline{0,9}$ на координатні осі. Позначимо довжини проєкцій на осі Ox через q_i , тобто

$$\begin{aligned} q_0 &= x_1, \\ q_1 &= x_2 - x_1 \\ &\dots \end{aligned}$$

$$q_9 = x_{10} - x_9 = 1 - x_9.$$

Очевидно, що $0 < q_i < 1, \sum_{i=0}^9 q_i = 1$.

Довжини проєкцій на осі Oy через u_i , тобто

$$u_0 = y_1, u_1 = |y_2 - y_1|, u_2 = |y_3 - y_2|, \dots, u_9 = |y_{10} - y_9|.$$

Виходячи з задання u_i очевидно, що виконується:

$$\begin{aligned} 0 &< u_i < 1, \\ u_0 - u_1 &\geq 0, \\ u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + u_4 &= 1, \\ 1 - u_5 &\geq 0, \\ 1 - u_5 + u_6 - u_7 &\geq 0, \\ 1 - u_5 + u_6 - u_7 + u_8 - u_9 &\geq 0. \end{aligned}$$

Позначимо через:

$$b_{\alpha_1} = \begin{cases} 0, & \alpha_1 = 0 \\ \sum_{i=0}^{\alpha_1-1} q_i, & \alpha_1 \in \{1, \dots, 9\} \end{cases}.$$

b_{α_1} співпадає з точками поділу відрізка $[0,1]$ по осі Ox .

При другому і всіх наступних кроках побудови кожен відрізок ламаної (рис.1) буде замінюватися на ламану, яка складається з 5 ланок (рис.2). При

цьому вершини нових ламаних ділять початковий відрізок в співвідношенні однаково для зростаючих і спадаючих ланок.

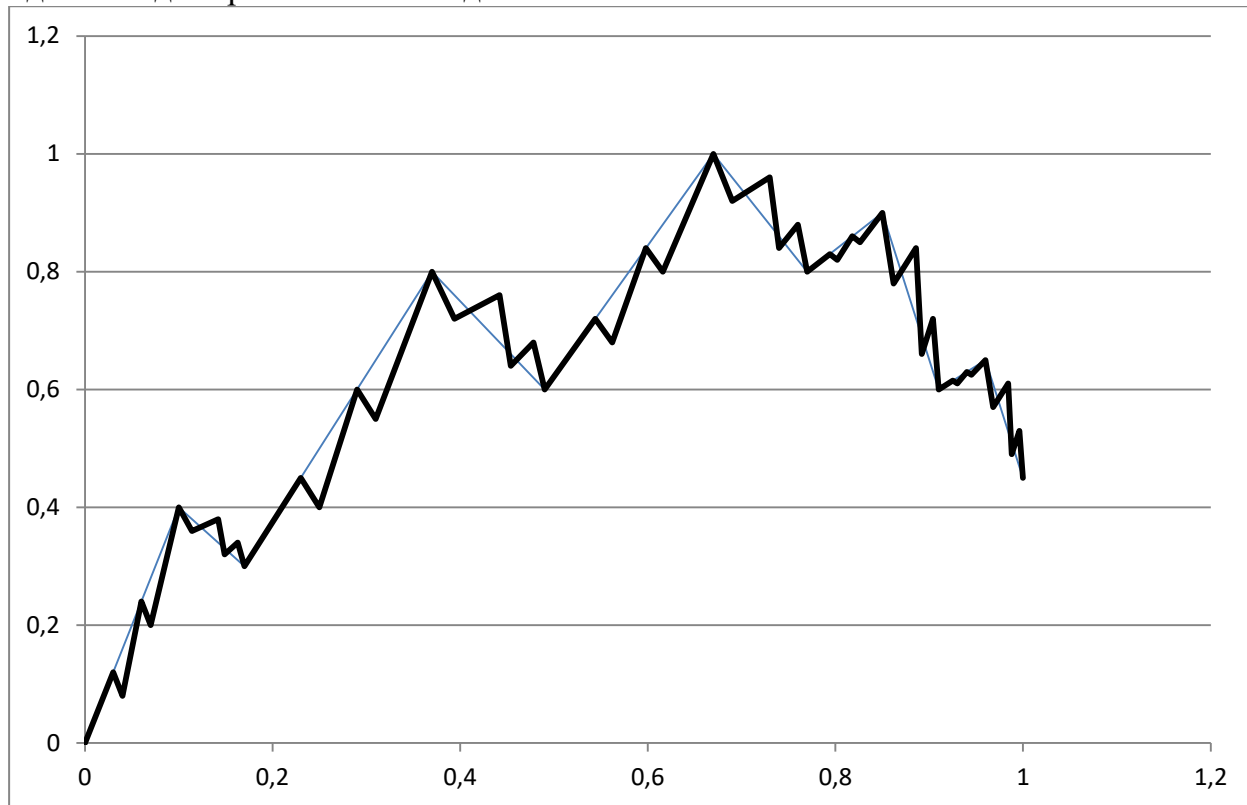


Рис.2

Ці співвідношення по осі Ox задамо в матриці \tilde{Q} , де рядочки з парними номерами задають співвідношення для зростаючих ланок, а непарними для спадаючих:

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} q_{0(2k)} & q_{1(2k)} & q_{2(2k)} & q_{3(2k)} & q_{4(2k)} \\ q_{0(2k-1)} & q_{1(2k-1)} & q_{2(2k-1)} & q_{3(2k-1)} & q_{4(2k-1)} \end{pmatrix}, k = \overline{0, \infty},$$

$$0 < q_{ij} < 1, \sum_{i=0}^4 q_{ij} = 1, j \in \{0,1\}.$$

Позначимо b_{α_j} :

$$b_{\alpha_j} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_j = 0 \\ \sum_{i=0}^{\alpha_j-1} q_{ij}, & \text{якщо } \alpha_j \in \{1,2,3,4\} \end{cases}$$

Використовуючи підхід аналогічно до задання чисел в Q -представленні [2], отримаємо наступне задання аргументу $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} x &= b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2 \alpha_1} q_{\alpha_1} + b_{\alpha_3 \alpha_2} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2 \alpha_1} + b_{\alpha_4 \alpha_3} q_{\alpha_1} q_{\alpha_2 \alpha_1} q_{\alpha_3 \alpha_2} + \dots = \\ &= b_{\alpha_1} + \sum_{n=2}^{\infty} (b_{\alpha_n \alpha_{n-1}} q_{\alpha_1} \prod_{j=2}^{n-1} q_{\alpha_j \alpha_{j-1}}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q^x} \end{aligned} \quad (1)$$

Лема. Для Q^x – задання дійсних чисел виконується рівність

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q^x}(0) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots (\alpha_n-1)}^{Q^x} \quad (2)$$

Доведення.

Розглянемо

$$\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n(0)}^{Q^x} = b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2\alpha_1}q_{\alpha_1} + b_{\alpha_3\alpha_2}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1} + b_{\alpha_4\alpha_3}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}q_{\alpha_3\alpha_2} + \dots + b_{\alpha_n\alpha_{n-1}}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\dots q_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}} + 0$$

$$\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots(\alpha_n-1)(4)}^{Q^x} = b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2\alpha_1}q_{\alpha_1} + \dots + b_{(\alpha_n-1)\alpha_{n-1}}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\dots q_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}} + b_{4(\alpha_n-1)}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\dots q_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}q_{(\alpha_n-1)\alpha_{n-1}} + b_{44}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\dots q_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}q_{(\alpha_n-1)\alpha_{n-1}}q_{4(\alpha_n-1)} + \dots$$

Знайдемо різницю

$$\begin{aligned} & \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n(0)}^{Q^x} - \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots(\alpha_n-1)(4)}^{Q^x} = \\ = & b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2\alpha_1}q_{\alpha_1} + \dots + b_{\alpha_n\alpha_{n-1}}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\dots q_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}} - (b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2\alpha_1}q_{\alpha_1} + \dots + \\ & + b_{(\alpha_n-1)\alpha_{n-1}}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\dots q_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}} + b_{4(\alpha_n-1)}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\dots q_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}q_{(\alpha_n-1)\alpha_{n-1}} + \\ & + b_{44}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\dots q_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}q_{(\alpha_n-1)\alpha_{n-1}}q_{4(\alpha_n-1)} + \dots) = \\ = & q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\dots q_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}(b_{\alpha_n\alpha_{n-1}} - b_{(\alpha_n-1)\alpha_{n-1}} - b_{4(\alpha_n-1)}q_{(\alpha_n-1)\alpha_{n-1}} - \\ & - b_{44}q_{(\alpha_n-1)\alpha_{n-1}}q_{4(\alpha_n-1)} - b_{44}q_{(\alpha_n-1)\alpha_{n-1}}q_{4(\alpha_n-1)}q_{44} - \dots). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} b_{\alpha_n\alpha_{n-1}} &= q_{0\alpha_{n-1}} + q_{1\alpha_{n-1}} + \dots + q_{(\alpha_n-1)\alpha_{n-1}}, \\ b_{(\alpha_n-1)\alpha_{n-1}} &= q_{0\alpha_{n-1}} + q_{1\alpha_{n-1}} + \dots + q_{(\alpha_n-2)\alpha_{n-1}}, \end{aligned}$$

то остання рівність буде еквівалентна

$$\begin{aligned} & q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\dots q_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}q_{(\alpha_n-1)\alpha_{n-1}}(1 - b_{4(\alpha_n-1)} - b_{44}q_{4(\alpha_n-1)} \cdot \\ & \cdot (1 + q_{44} + q_{44}^2 + \dots)) = q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\dots q_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}q_{(\alpha_n-1)\alpha_{n-1}} \cdot \\ & \cdot \left(1 - b_{4(\alpha_n-1)} - b_{44}q_{4(\alpha_n-1)} \cdot \frac{1}{1 - q_{44}}\right). \end{aligned}$$

Оскільки $q_{\alpha_1}q_{\alpha_2\alpha_1}\dots q_{\alpha_{n-1}\alpha_{n-2}}q_{(\alpha_n-1)\alpha_{n-1}} \neq 0$, то розглянемо окремо $\left(1 - b_{4(\alpha_n-1)} - b_{44}q_{4(\alpha_n-1)} \cdot \frac{1}{1 - q_{44}}\right)$. Можливі два випадки:

1) α_n – непарне, звідси $(\alpha_n - 1)$ – парне. Тоді $b_{4(\alpha_n-1)} = b_{44}, q_{4(\alpha_n-1)} = q_{44}$.

$$\begin{aligned} 1 - b_{4(\alpha_n-1)} - b_{44}q_{4(\alpha_n-1)} \cdot \frac{1}{1 - q_{44}} &= 1 - b_{44} - b_{44} \frac{q_{44}}{1 - q_{44}} = \\ &= [b_{44} = q_{04} + q_{14} + q_{24} + q_{34} = 1 - q_{44}] = \\ &= 1 - 1 + q_{44} - (1 - q_{44}) \frac{q_{44}}{1 - q_{44}} = 0 \end{aligned}$$

Отже, $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n(0)}^{Q^x} = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots(\alpha_n-1)(4)}^{Q^x}$, для α_n – непарне.

2) α_n – парне, звідси $(\alpha_n - 1)$ – непарне. Тоді оскільки $b_{44} = q_{04} + q_{14} + q_{24} + q_{34} = 1 - q_{44}$ отримаємо:

$$\begin{aligned} 1 - b_{4(\alpha_n-1)} - b_{44}q_{4(\alpha_n-1)} \cdot \frac{1}{1 - q_{44}} &= 1 - b_{4(\alpha_n-1)} - q_{4(\alpha_n-1)} = \\ = [b_{4(\alpha_n-1)} = q_{0(\alpha_n-1)} + q_{1(\alpha_n-1)} + q_{2(\alpha_n-1)} + q_{3(\alpha_n-1)} = 1 - q_{4(\alpha_n-1)}] &= \\ &= 1 - 1 + q_{4(\alpha_n-1)} - q_{4(\alpha_n-1)} = 0 \end{aligned}$$

Отже, $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n(0)}^{Q^x} = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots(\alpha_n-1)(4)}^{Q^x}$.

Лема доведена.

Числа виду $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n(0)}^{Q^x}$ або $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n(4)}^{Q^x}$ будемо називати Q^x – раціональні, а числа, які не містять періоду 0 або 4 будемо називати Q^x – ірраціональними.

Позначимо:

$$d_{\alpha_1} = \begin{cases} 0, \alpha_1 = 0 \\ \sum_{i=0}^{\alpha_1-1} u_i, \alpha_1 \in \{1, \dots, 9\}. \end{cases}$$

Аналогічно до x задамо представлення $y \in [0,1]$. Для цього співвідношення по осі Oy задамо в матриці \tilde{U} , де рядочки з парними номерами задають співвідношення для зростаючих ланок, а непарними для спадаючих:

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} u_{0(2k)} & u_{1(2k)} & u_{2(2k)} & u_{3(2k)} & u_{4(2k)} \\ u_{0(2k-1)} & u_{1(2k-1)} & u_{2(2k-1)} & u_{3(2k-1)} & u_{4(2k-1)} \end{pmatrix}, k = \overline{0, \infty},$$

$$0 < u_{ij} < 1, \sum_{i=0}^4 u_{ij} = 1, j \in \{0,1\}.$$

Позначимо:

$$d_{\alpha_j j} = \begin{cases} 0, \text{якщо } \alpha_j = 0 \\ (-1)^{\alpha_j-1} u_{0\alpha_j-1}, \text{якщо } \alpha_j = 1 \\ (-1)^{\alpha_j-1} (u_{0\alpha_j-1} - u_{1\alpha_j-1}), \text{якщо } \alpha_j = 2 \\ (-1)^{\alpha_j-1} (u_{0\alpha_j-1} - u_{1\alpha_j-1} + u_{2\alpha_j-1}), \text{якщо } \alpha_j = 3 \\ (-1)^{\alpha_j-1} (u_{0\alpha_j-1} - u_{1\alpha_j-1} + u_{2\alpha_j-1} - u_{3\alpha_j-1}), \text{якщо } \alpha_j = 4 \end{cases}$$

Використовуючи підхід аналогічно до задання чисел в Q - представленні [1], отримаємо наступне задання аргументу $y \in [0,1]$:

$$y = d_{\alpha_1} + d_{\alpha_2 \alpha_1} u_{\alpha_1} + d_{\alpha_3 \alpha_2} u_{\alpha_1} u_{\alpha_2 \alpha_1} + d_{\alpha_4 \alpha_3} u_{\alpha_1} u_{\alpha_2 \alpha_1} u_{\alpha_3 \alpha_2} + \dots =$$

$$= d_{\alpha_1} + \sum_{n=2}^{\infty} (d_{\alpha_n \alpha_{n-1}} u_{\alpha_1} \prod_{j=2}^{n-1} u_{\alpha_j \alpha_{j-1}}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q^y}. \quad (3)$$

Отже, числа x та y можна представити у вигляді Q^x та Q^y зображень:

$$x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q^x}, \alpha_1 \in \{0,1, \dots, 9\}, \alpha_n \in \{0,1,2,3,4\}, n \geq 2.$$

$$y = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q^y}, \alpha_n \in \{0,1,2,3,4\}, n \geq 2.$$

Теорема. Рівність

$$f\left(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q^x}\right) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q^y} \quad (4)$$

$\alpha_1 \in \{0, \dots, 9\}, \alpha_j \in \{0, \dots, 4\}, j = \overline{2, \infty}$ задає функцію на $[0,1]$.

Доведення.

Покажемо, що f задає відображення $[0,1]$ в $[0,1]$ таке, що $\forall x \in [0,1]$ відповідає єдине значення $y \in [0,1]$.

Очевидно, що для Q^x – ірраціональних це виконується, бо задається єдиним набором.

Доведемо це твердження для Q^x – раціональних, тобто покажемо, що

$$f\left(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n(0)}^{Q^x}\right) = f\left(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots (\alpha_n-1)(4)}^{Q^x}\right) \Leftrightarrow \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n(0)}^{Q^y} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots (\alpha_n-1)(4)}^{Q^y} \quad (5)$$

Розглянемо

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n(0)}^{Q^y} = d_{\alpha_1} + d_{\alpha_2 \alpha_1} u_{\alpha_1} + \dots + d_{\alpha_n \alpha_{n-1}} u_{\alpha_1} u_{\alpha_2 \alpha_1} \dots u_{\alpha_{n-1} \alpha_{n-2}} + 0$$

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots (\alpha_{n-1})(4)}^{Q^y} = d_{\alpha_1} + d_{\alpha_2 \alpha_1} u_{\alpha_1} + \dots + d_{(\alpha_{n-1}) \alpha_{n-1}} u_{\alpha_1} u_{\alpha_2 \alpha_1} \dots u_{\alpha_{n-1} \alpha_{n-2}} +$$

$$+ d_{4(\alpha_{n-1})} u_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_{n-1} \alpha_{n-2}} u_{(\alpha_{n-1}) \alpha_{n-1}} + d_{44} u_{\alpha_1} \dots u_{(\alpha_{n-1}) \alpha_{n-1}} u_{4(\alpha_{n-1})} + \dots$$

Знайдемо різницю

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n(0)}^{Q^y} - \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots (\alpha_{n-1})(4)}^{Q^y} = d_{\alpha_1} + d_{\alpha_2 \alpha_1} u_{\alpha_1} + \dots + d_{\alpha_n \alpha_{n-1}} u_{\alpha_1} u_{\alpha_2 \alpha_1} \dots \cdot$$

$$\cdot u_{\alpha_{n-1} \alpha_{n-2}} - (d_{\alpha_1} + d_{\alpha_2 \alpha_1} u_{\alpha_1} + \dots + d_{(\alpha_{n-1}) \alpha_{n-1}} u_{\alpha_1} u_{\alpha_2 \alpha_1} \dots u_{\alpha_{n-1} \alpha_{n-2}} +$$

$$+ d_{4(\alpha_{n-1})} u_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_{n-1} \alpha_{n-2}} u_{(\alpha_{n-1}) \alpha_{n-1}} + d_{44} u_{\alpha_1} \dots u_{(\alpha_{n-1}) \alpha_{n-1}} u_{4(\alpha_{n-1})} + \dots) =$$

$$= u_{\alpha_1} u_{\alpha_2 \alpha_1} \dots u_{\alpha_{n-1} \alpha_{n-2}} (d_{\alpha_n \alpha_{n-1}} - d_{(\alpha_{n-1}) \alpha_{n-1}} - d_{4(\alpha_{n-1})} u_{(\alpha_{n-1}) \alpha_{n-1}} -$$

$$- d_{44} u_{(\alpha_{n-1}) \alpha_{n-1}} u_{4(\alpha_{n-1})} - \dots)$$

Оскільки

$$d_{\alpha_n \alpha_{n-1}} = (-1)^{\alpha_{n-1}} (u_{0\alpha_{n-1}} - u_{1\alpha_{n-1}} + u_{2\alpha_{n-1}} - \dots + (-1)^{\alpha_{n-1}} u_{(\alpha_{n-1}) \alpha_{n-1}})$$

$$d_{(\alpha_{n-1}) \alpha_{n-1}} = (-1)^{\alpha_{n-1}} (u_{0\alpha_{n-1}} - u_{1\alpha_{n-1}} + u_{2\alpha_{n-1}} - \dots + (-1)^{\alpha_{n-2}} u_{(\alpha_{n-2}) \alpha_{n-1}})$$

$$d_{\alpha_n \alpha_{n-1}} - d_{(\alpha_{n-1}) \alpha_{n-1}} = (-1)^{\alpha_{n-1}} (-1)^{\alpha_{n-1}} u_{(\alpha_{n-1}) \alpha_{n-1}} = u_{(\alpha_{n-1}) \alpha_{n-1}},$$

то різниця матиме вигляд:

$$\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n(0)}^{Q^y} - \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots (\alpha_{n-1})(4)}^{Q^y} = u_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_{n-1} \alpha_{n-2}} u_{(\alpha_{n-1}) \alpha_{n-1}} (1 - d_{4(\alpha_{n-1})} -$$

$$- d_{44} u_{4(\alpha_{n-1})} - d_{44} u_{4(\alpha_{n-1})} u_{44} - \dots) = u_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_{n-1} \alpha_{n-2}} u_{(\alpha_{n-1}) \alpha_{n-1}} (1 -$$

$$- d_{4(\alpha_{n-1})} - d_{44} u_{4(\alpha_{n-1})}) (1 + u_{44} + u_{44} u_{44} + \dots) = u_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_{n-1} \alpha_{n-2}} u_{(\alpha_{n-1}) \alpha_{n-1}}$$

$$\cdot (1 - d_{4(\alpha_{n-1})} - d_{44} u_{4(\alpha_{n-1})} \frac{1}{1 - u_{44}})$$

Оскільки $u_{\alpha_1} \dots u_{\alpha_{n-1} \alpha_{n-2}} u_{(\alpha_{n-1}) \alpha_{n-1}} \neq 0$, то розглянемо $(1 - d_{4(\alpha_{n-1})} -$

$- d_{44} u_{4(\alpha_{n-1})} \frac{1}{1 - u_{44}})$. Враховуючи означення d_{α_j} маємо:

$$d_{44} = (-1)^4 (u_{04} - u_{14} + u_{24} - u_{34}) = 1 - u_{44},$$

$$d_{4(\alpha_{n-1})} = 1 - u_{4(\alpha_{n-1})}.$$

Звідси

$$1 - d_{4(\alpha_{n-1})} - d_{44} u_{4(\alpha_{n-1})} \frac{1}{1 - u_{44}} = 1 - (1 - u_{4(\alpha_{n-1})}) - u_{4(\alpha_{n-1})} \frac{1 - u_{44}}{1 - u_{44}} = 0$$

Отже, (5) виконується.

Твердження теореми доведено.

Таким чином, рівність (4) визначає функцію, для якої виконуються умови $f(\Delta_{\alpha_1(0)}^{Q^x}) = \Delta_{\alpha_1(0)}^{Q^y}$, при чому точки з координатами $(\Delta_{\alpha_1(0)}^{Q^x}, \Delta_{\alpha_1(0)}^{Q^y})$, $\alpha_i \in \{0, \dots, 8\}$ та $(\Delta_{9(4)}^{Q^x}, \Delta_{9(4)}^{Q^y})$ є вершинами ламаної, яка визначалась заданим числовим рядом.

Список використаних джерел

1. Працевитый Н.В., Турбин А.Ф. Фрактальные множества, функции, распределения. – К.: Наукова думка, 1992.
2. Вильямс Б. Торговый хаос. – Альпина Паблишер, 2018. – 310 с.
3. Peters E. E. Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics. - John Wiley & Sons, Inc, 1994. - 316 p.

Прусенко В.С.

студентка спеціальності «Середня освіта (математика)»

факультету математики, інформатики та фізики НПУ імені М.П. Драгоманова

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук **Ковальов І.М.**

m-ФУНКЦІЯ ВЕЙЛЯ ІНДЕФІНІТНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ

Анотація. Теорія Вейля–Тітчмарша для індефінітних операторів Штурма–Ліувіля є актуальною. Вивчаються індефінітні оператори Штурма–Ліувіля з лінійним і сталим потенціалом. Знайдено явні формули для m -функцію відповідних диференціальних операторів.

Ключові слова: m -функція, оператор Штурма–Ліувіля, індефінітний диференціальний оператор.

Abstract. The Weyl–Titchmarsh theory for the indefinite Sturm-Liouville operators is actual. We study the indefinite Sturm-Liouville operators with linear and constant potential. The m -function associated with one will be found.

Key words: m -function, Sturm-Liouville operator, indefinite differential operator.

I. Вступ

Диференціальні оператори Штурма–Ліувіля є актуальною тематикою сучасної математики. Цей напрям розвивається та має не тільки велику наукову зацікавленість, але й прикладне застосування.

Важливим аспектом при дослідженні операторів Штурма–Ліувіля є m -функція Вейля, яка відображає спектральні властивості даного оператора.

Пошук функції Вейля є не завжди простою задачею. Для цього існують різні алгоритми, а саме : пошук через розв'язок відповідного рівняння або через граничні трійки.

Останніми роками зацікавленість Штурма–Ліувіля операторів виникає у індефінітних просторах: Крейна та Понтрягіна. Такою математикою займаються Ф. Гестезі, Ю. Бернц, Х.Лангер, К. Трунк та інші.

Основним результатом роботи є знаходження явних формул m -функцій Вейля для індефінітних операторів Штурма–Ліувіля зі сталим або лінійним потенціалами.

II. Попередні відомості

Означення. ([1,2,3]) Диференціальний оператор $A := -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$, з областю визначення $L_2(a, b)$ та з локально інтегрованим потенціалом q називається диференціальним оператором Штурма–Ліувіля.

Означення. ([1,2,3]) Диференціальний оператор $A := -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$, з областю визначення $L_2((-a, a), \text{Sign}(x))$ називається індефінітним оператором Штурма -Ліувілля.

Означення. ([1,2,3]) *m-функція Тітчмарша-Вейля.* m -функцію оператора Штурма -Ліувілля можна знайти з розв'язків наступного рівняння

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x) \quad (1)$$

Якщо $f(x; \lambda) \in$ розв'язок (1), то m -функція знаходиться за формулою

$$m(\lambda) = \frac{f'(0, \lambda)}{f(0, \lambda)} \quad (2)$$

Функція Ейрі.

Функції $A_i(x)$ та пов'язана з нею функція $B_i(x)$, яка називається функцією Ейрі другого роду, є лінійно незалежними розв'язками диференціального рівняння $y'' - xy = 0$, яке називається рівнянням Ейрі.

Для дійсних x , функція Ейрі та функція Ейрі другого роду визначаються інтегралом:

$$A_i(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt$$

$$B_i(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t^3}{3} + xt\right) + \sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt.$$

Виконуючи диференціювання під знаком інтегралу, можна переконатися, що ці функції справді задовольняють рівнянню Ейрі.

Властивості:

В точці $x=0$ функції $A_i(x)$ і $B_i(x)$ та їх похідні мають значення

$$A_i(0) = \frac{1}{3^{2/3}\Gamma(\frac{2}{3})} \quad A_i'(0) = -\frac{1}{3^{1/3}\Gamma(\frac{1}{3})}$$

$$B_i(0) = \frac{1}{3^{1/6}\Gamma(\frac{2}{3})} \quad B_i'(0) = \frac{3^{1/6}}{\Gamma(\frac{1}{3})}$$

Значення $A_i'(x)$ та $B_i'(x)$ знаходимо за формулами:

$$A_i'(x) \sim -\frac{(x)^{1/4} e^{-\frac{2}{3}(x)^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{(-1)^n \Gamma(n+\frac{5}{6}) \Gamma(n+\frac{1}{6}) (\frac{3}{4})^n}{2\pi n! (x)^{\frac{3n}{2}}} \right] \quad (3)$$

$$B_i'(x) \sim \frac{(x)^{1/4} e^{\frac{2}{3}(x)^{3/2}}}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{\Gamma(n+\frac{5}{6}) \Gamma(n+\frac{1}{6}) (\frac{3}{4})^n}{2\pi n! (x)^{\frac{3n}{2}}} \right] \quad (4)$$

Теорема 2.1. Нехай задано диференціальний оператор $A = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ з областю визначення $L_2(a, b)$ та з локально інтегрованим потенціалом q . Тоді його m -

функція Вейля $m(\lambda) = f(0; \lambda)$, де $f(x; \lambda)$ – є розв'язок рівняння $f'(x; \lambda) + f^2(x; \lambda) = \lambda - q(x)$.

Доведення.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$-y''(x; \lambda) + q(x)y(x; \lambda) = \lambda y(x; \lambda) \quad (5)$$

Зауважимо, що $\left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 \Rightarrow \frac{y''}{y} = \left(\frac{y'}{y}\right)' + \left(\frac{y'}{y}\right)^2$

(6),

тоді (5) перепишемо у вигляді:

$$-\frac{y''}{y} = \lambda - q(x)$$

Замість $-\frac{y''}{y}$ підставляємо його значення із (6), отримаємо

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' + \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = \lambda - q(x) \quad (7)$$

Зробимо заміну: $\frac{y'}{y} = f$, тоді отримаємо таке диференціальне рівняння.

$$f' + f^2 = \lambda - q(x) \quad (8)$$

Розв'язком рівняння $f(x; \lambda)$, відповідно є m -функція Вейля оператора $A = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ може бути знайдена за формулою: $m(\lambda) = f(0; \lambda)$.

(9)

Доведено.

III. Функція Вейля індефінітного оператора Штурма-Ліувілля зі сталим потенціалом

У цьому параграфі дослідимо індефінітні оператори Штурма-Ліувілля зі сталими потенціалами.

Теорема 3.1. Нехай задано індефінітний оператор Штурма-Ліувілля на проміжку $(-a; a)$ з нульовим потенціалом $q(x)=0$, такий що $A = -\frac{d^2}{dx^2}$. Тоді m -функція Вейля має вигляд:

$$m(\lambda) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda} (e^{2\sqrt{\lambda} \times c_1} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{\lambda} \times c_1}}, \lambda > 0 \\ \frac{\sqrt{-\lambda} (e^{2\sqrt{-\lambda} \times c_1} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{-\lambda} \times c_1}}, \lambda < 0 \end{cases}$$

Доведення.

Розглянемо рівняння

$$-y'' = \lambda \operatorname{sign} x y$$

(10)

Щоб знайти m -функцію, розглянемо два випадки: для $\lambda > 0$ та $\lambda < 0$.

- Нехай $\lambda > 0$, тоді за (10) при $q(x)=0$ матимемо:

$$f' + f^2 = \lambda$$

$$\frac{df}{dx} = \lambda - f^2$$

$$\frac{df}{(\lambda - f^2)} = dx$$

$$\int dx = \int \frac{df}{(\lambda - f^2)} + C, \text{ де } C = \text{const.}$$

$$x + C_1 = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \ln \frac{\sqrt{\lambda} + f}{\sqrt{\lambda} - f}, \text{ де } C_1 = \pm C$$

$$2\sqrt{\lambda}(x + C_1) = \ln \frac{\sqrt{\lambda} + f}{\sqrt{\lambda} - f}$$

$$\frac{\sqrt{\lambda} + f}{\sqrt{\lambda} - f} = e^{2\sqrt{\lambda}(x+C_1)}$$

$$\sqrt{\lambda} + f = e^{2\sqrt{\lambda}(x+C_1)} \times \sqrt{\lambda} - e^{2\sqrt{\lambda}(x+C_1)} \times f$$

$$f(1 + e^{2\sqrt{\lambda}(x+C_1)}) = \sqrt{\lambda}(e^{2\sqrt{\lambda}(x+C_1)} - 1)$$

$$f(x; \lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}(e^{2\sqrt{\lambda}(x+C_1)} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{\lambda}(x+C_1)}}$$

Знайдемо значення $f(0; \lambda)$

$$f(0; \lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}(e^{2\sqrt{\lambda}(0+C_1)} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{\lambda}(0+C_1)}} = \frac{\sqrt{\lambda}(e^{2\sqrt{\lambda} \times C_1} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{\lambda} \times C_1}}$$

За (9) знайдемо значення m -функції Вейля:

$$m(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}(e^{2\sqrt{\lambda} \times C_1} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{\lambda} \times C_1}}$$

- Нехай $\lambda < 0$, тоді за (8) при $q(x)=0$ матимемо:

$$f' + f^2 = -\lambda$$

$$\frac{df}{dx} = -\lambda - f^2$$

$$\frac{df}{(-\lambda - f^2)} = dx$$

$$\int dx = \int \frac{df}{(-\lambda - f^2)} + C, \text{ де } C = \text{const.}$$

$$x + C_1 = \frac{1}{2\sqrt{-\lambda}} \ln \frac{\sqrt{-\lambda} + f}{\sqrt{-\lambda} - f}, \text{ де } C_1 = \pm C$$

$$2\sqrt{-\lambda}(x + C_1) = \ln \frac{\sqrt{-\lambda} + f}{\sqrt{-\lambda} - f}$$

$$\frac{\sqrt{-\lambda} + f}{\sqrt{-\lambda} - f} = e^{2\sqrt{-\lambda}(x+C_1)}$$

$$\sqrt{-\lambda} + f = e^{2\sqrt{-\lambda}(x+C_1)} \times \sqrt{-\lambda} - e^{2\sqrt{-\lambda}(x+C_1)} \times f$$

$$f(1 + e^{2\sqrt{-\lambda}(x+C_1)}) = \sqrt{-\lambda}(e^{2\sqrt{-\lambda}(x+C_1)} - 1)$$

$$f(x; \lambda) = \frac{\sqrt{-\lambda}(e^{2\sqrt{-\lambda}(x+C_1)} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{-\lambda}(x+C_1)}}$$

Знайдемо значення $f(0; \lambda)$

$$f(x; \lambda) = \frac{\sqrt{-\lambda}(e^{\sqrt{-\lambda}(x+C_1)} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{-\lambda}(x+C_1)}}$$

$$f(0; \lambda) = \frac{\sqrt{-\lambda}(e^{2\sqrt{-\lambda}(0+C_1)} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{-\lambda}(0+C_1)}} = \frac{\sqrt{-\lambda}(e^{2\sqrt{-\lambda} \times C_1} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{-\lambda} \times C_1}}$$

За (9) знайдемо значення m -функції Вейля:

$$m(\lambda) = \frac{\sqrt{-\lambda}(e^{2\sqrt{-\lambda} \times C_1} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{-\lambda} \times C_1}}$$

Таким чином було доведено, що для рівняння (10) m -функція Вейля матиме такий вигляд

$$m(\lambda) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda}(e^{2\sqrt{\lambda} \times C_1} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{\lambda} \times C_1}}, \lambda > 0 \\ \frac{\sqrt{-\lambda}(e^{2\sqrt{-\lambda} \times C_1} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{-\lambda} \times C_1}}, \lambda < 0 \end{cases}$$

Доведено.

Теорема 3.2. Нехай задано індефенітний оператор Штурма-Ліувілля на проміжку $(-a; a)$ зі сталим потенціалом $q(x) = b$, $b \neq 0$, такий що $A = -\frac{d^2}{dx^2} + b$.

Тоді m -функція Вейля має вигляд

$$m(\lambda) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda - b}(e^{2\sqrt{\lambda - b} \times C_1} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{\lambda - b} \times C_1}}, & \lambda > 0 \\ \frac{\sqrt{-\lambda - b}(e^{2\sqrt{-\lambda - b} \times C_1} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{-\lambda - b} \times C_1}}, & \lambda < 0. \end{cases}$$

Доведення.

Розглянемо рівняння

$$-y'' = \lambda \operatorname{sign} xy \tag{11}$$

Щоб знайти m -функцію маємо розглянути два випадки: $\lambda < 0$ та $\lambda > 0$

- Нехай $\lambda > 0$, тоді за (8) при $q(x)=b$, $b \neq 0$ матимемо:

$$f' + f^2 = \lambda - b$$

$$\frac{df}{dx} = \lambda - b - f^2$$

$$\frac{df}{(\lambda - b - f^2)} = dx$$

$$\int dx = \int \frac{df}{(\lambda - b - f^2)} + C, \text{ де } C = \text{const.}$$

$$x + C_1 = \frac{1}{2\sqrt{\lambda - b}} \ln \frac{\sqrt{\lambda - b} + f}{\sqrt{\lambda - b} - f}, \text{ де } C_1 = \pm C$$

$$2\sqrt{\lambda - b}(x + C_1) = \ln \frac{\sqrt{\lambda - b} + f}{\sqrt{\lambda - b} - f}$$

$$\frac{\sqrt{\lambda - b} + f}{\sqrt{\lambda - b} - f} = e^{2\sqrt{\lambda - b}(x + C_1)}$$

$$\sqrt{\lambda - b} + f = e^{2\sqrt{\lambda - b}(x + C_1)}(\sqrt{\lambda - b} - f)$$

$$f + f(e^{2\sqrt{\lambda - b}(x + C_1)}) = e^{2\sqrt{\lambda - b}(x + C_1)} \times \sqrt{\lambda - b} - \sqrt{\lambda - b}$$

$$f(x; \lambda - b) = \frac{\sqrt{\lambda - b}(e^{2\sqrt{\lambda - b}(x + C_1)} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{\lambda - b}(x + C_1)}}$$

Знайдемо значення $f(0; \lambda - b)$

$$f(x; \lambda - b) = \frac{\sqrt{\lambda - b}(e^{2\sqrt{\lambda - b}(x + C_1)} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{\lambda - b}(x + C_1)}}$$

$$f(0; \lambda - b) = \frac{\sqrt{\lambda - b}(e^{2\sqrt{\lambda - b}(0 + C_1)} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{\lambda - b}(0 + C_1)}} = \frac{\sqrt{\lambda - b}(e^{2\sqrt{\lambda - b} \times C_1} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{\lambda - b} \times C_1}}$$

За (9) знайдемо значення m -функції Вейля:

$$m(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda - b}(e^{2\sqrt{\lambda - b} \times C_1} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{\lambda - b} \times C_1}}$$

- Нехай $\lambda < 0$, тоді за (8) при $q(x)=b$, $b \neq 0$ матимемо:

$$f' + f^2 = -\lambda - b$$

$$\frac{df}{dx} = -\lambda - b - f^2$$

$$\frac{df}{(-\lambda - b - f^2)} = dx$$

$$\int dx = \int \frac{df}{(-\lambda - b - f^2)} + C, \text{ де } C = \text{const.}$$

$$x + C_1 = \frac{1}{2\sqrt{-\lambda - b}} \ln \frac{\sqrt{-\lambda - b} + f}{\sqrt{-\lambda - b} - f}, \text{ де } C_1 = \pm C$$

$$e^{2\sqrt{-\lambda - b}(x+C_1)} = \frac{\sqrt{-\lambda - b} + f}{\sqrt{-\lambda - b} - f}$$

$$\frac{\sqrt{-\lambda - b} + f}{\sqrt{-\lambda - b} - f} = e^{2\sqrt{-\lambda - b}(x+C_1)}$$

$$\sqrt{-\lambda - b} + f = e^{2\sqrt{-\lambda - b}(x+C_1)} (\sqrt{-\lambda - b} - f)$$

$$f + f(e^{2\sqrt{-\lambda - b}(x+C_1)}) = e^{2\sqrt{-\lambda - b}(x+C_1)} \times \sqrt{-\lambda - b} - \sqrt{-\lambda - b}$$

$$f(x; -\lambda - b) = \frac{\sqrt{-\lambda - b}(e^{2\sqrt{-\lambda - b}(x+C_1)} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{-\lambda - b}(x+C_1)}}$$

Знайдемо значення $f(0; \lambda - b)$

$$f(x; \lambda - b) = \frac{\sqrt{-\lambda - b}(e^{2\sqrt{-\lambda - b}(x+C_1)} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{-\lambda - b}(x+C_1)}}$$

$$f(0; -\lambda - b) = \frac{\sqrt{-\lambda - b}(e^{2\sqrt{-\lambda - b}(0+C_1)} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{-\lambda - b}(0+C_1)}} = \frac{\sqrt{-\lambda - b}(e^{2\sqrt{-\lambda - b} \times C_1} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{-\lambda - b} \times C_1}}$$

За (9) знайдемо значення m -функція Вейля:

$$m(\lambda) = \frac{\sqrt{-\lambda - b}(e^{2\sqrt{-\lambda - b} \times C_1} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{-\lambda - b} \times C_1}}$$

Таким чином отримали, що для (11) m -функція матиме вигляд:

$$m(\lambda) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda - b}(e^{2\sqrt{\lambda - b} \times C_1} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{\lambda - b} \times C_1}}, & \lambda > 0 \\ \frac{\sqrt{-\lambda - b}(e^{2\sqrt{-\lambda - b} \times C_1} - 1)}{1 + e^{2\sqrt{-\lambda - b} \times C_1}}, & \lambda < 0. \end{cases}$$

IV. Функція Вейля індефінітного оператора Штурма-Ліувілля з лінійним потенціалом

У цьому пункті дослідимо індефінітні оператори Штурма-Ліувілля з лінійним потенціалом.

Теорема 4.1. Нехай задано індефінітний оператор Штурма-Ліувілля на проміжку $(-a; a)$ з потенціалом $q(x)=x$. Тоді m -функція Вейля

$$m(\lambda) = \begin{cases} \frac{C_1 \left(-\frac{(\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}(\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{(-1)^n \Gamma(n+\frac{5}{6}) \Gamma(n+\frac{1}{6}) (\frac{3}{4})^n}{2\pi n! (\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right) + C_2 \left(\frac{(\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{\Gamma(n+\frac{5}{6}) \Gamma(n+\frac{1}{6}) (\frac{3}{4})^n}{2\pi n! (\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right)}{C_1 A_i(\lambda) + C_2 B_i(\lambda)}, & x < 0 \\ \frac{C_1 \left(-\frac{(-\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}(-\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{(-1)^n \Gamma(n+\frac{5}{6}) \Gamma(n+\frac{1}{6}) (\frac{3}{4})^n}{2\pi n! (-\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right) + C_2 \left(\frac{(-\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(-\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{\Gamma(n+\frac{5}{6}) \Gamma(n+\frac{1}{6}) (\frac{3}{4})^n}{2\pi n! (-\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right)}{C_1 A_i(-\lambda) + C_2 B_i(-\lambda)}, & x > 0 \end{cases}$$

Доведення.

Розглянемо рівняння:

$$-y'' + xy = \lambda \operatorname{sign} xy \quad (12)$$

Щоб знайти його m-функцію, маємо розглянути:

$$\begin{cases} -y'' + xy = -\lambda y, & x < 0 \\ -y'' + xy = \lambda y, & x > 0 \end{cases}$$

1) Розглянемо випадок, коли $x < 0$

$$-y'' + xy = -\lambda y$$

$$-y'' + (x + \lambda)y = 0$$

$$\text{Заміна: } x + \lambda = t.$$

$$y'(x) = \tilde{y}'(t)(t - \lambda)'$$

$$y''(x) = (\tilde{y}')' = \tilde{y}''$$

$$-\tilde{y}'' + t\tilde{y} = 0.$$

$$\tilde{y}(t) = C_1 A_i(t) + C_2 B_i(t)$$

$$y(x) = C_1 A_i(x + \lambda) + C_2 B_i(x + \lambda)$$

$$y(0) = C_1 A_i(\lambda) + C_2 B_i(\lambda)$$

$$y'(x) = C_1 (A_i(x + \lambda))' \times (x + \lambda)' + C_2 (B_i(x + \lambda))' \times (x + \lambda)'$$

Так, як $(x + \lambda)' = 1$, маємо :

$$y'(x) = C_1 (A_i(x + \lambda))' + C_2 (B_i(x + \lambda))' \quad (13)$$

З формул (3) та (4) знайдемо значення похідної $A_i'(x + \lambda)$ та $B_i(x + \lambda)$

$$A_i'(x + \lambda) \sim -\frac{(x + \lambda)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}(x+\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 6n}{1 - 6n} \frac{(-1)^n \Gamma(n + \frac{5}{6}) \Gamma(n + \frac{1}{6}) (\frac{3}{4})^n}{2\pi n! (x + \lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right]$$

$$B_i'(x + \lambda) \sim \frac{(x + \lambda)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(x+\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 6n}{1 - 6n} \frac{\Gamma(n + \frac{5}{6}) \Gamma(n + \frac{1}{6}) (\frac{3}{4})^n}{2\pi n! (x + \lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right]$$

Підставивши їх значення у формулу (13) отримаємо:

$$y'(x) = C_1 \left(-\frac{(x+\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}(x+\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{(-1)^n \Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (x+\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right) + C_2 \left(\frac{(x+\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(x+\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{\Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (x+\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right)$$

Знайдемо значення $y'(0)$

$$y'(0) = C_1 \left(-\frac{(\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}(\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{(-1)^n \Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right) + C_2 \left(\frac{(\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{\Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right)$$

Таким чином при $x < 0$ m-функція Вейля для рівняння (12) за формулою (2) матиме такий вигляд:

$$m(\lambda) = \frac{y'(0;\lambda)}{y(0;\lambda)} = \frac{C_1 \left(-\frac{(\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}(\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{(-1)^n \Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right)}{C_1 A_i(\lambda) + C_2 B_i(\lambda)} + \frac{C_2 \left(\frac{(\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{\Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right)}{C_1 A_i(\lambda) + C_2 B_i(\lambda)}$$

2) Розглянемо випадок, коли $x > 0$

$$\begin{aligned} -y'' + xy &= \lambda y \\ -y'' + (x - \lambda)y &= 0 \\ \text{Заміна: } x - \lambda &= t. \\ y'(x) &= \tilde{y}'(t)(t + \lambda)' \\ y''(x) &= (\tilde{y}')' = \tilde{y}'' \\ -\tilde{y}'' + t\tilde{y} &= 0. \\ \tilde{y}(t) &= C_1 A_i(t) + C_2 B_i(t) \\ y(x) &= C_1 A_i(x - \lambda) + C_2 B_i(x - \lambda) \\ y(0) &= C_1 A_i(-\lambda) + C_2 B_i(-\lambda) \\ y'(x) &= C_1 (A_i(x - \lambda))' \times (x - \lambda)' + C_2 (B_i(x - \lambda))' \times (x - \lambda)' \end{aligned}$$

Так, як $(x - \lambda)' = 1$, маємо :

$$y'(x) = C_1 (A_i(x - \lambda))' + C_2 (B_i(x - \lambda))' \quad (14)$$

З формул (3) та (4) знайдемо значення похідної $A_i'(x - \lambda)$ та $B_i(x - \lambda)$

$$A_i'(x - \lambda) \sim - \frac{(x - \lambda)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}(x-\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 6n}{1 - 6n} \frac{(-1)^n \Gamma\left(n + \frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (x - \lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right]$$

$$B_i'(x - \lambda) \sim \frac{(x - \lambda)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(x-\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 6n}{1 - 6n} \frac{\Gamma\left(n + \frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (x - \lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right]$$

Підставимо їх значення у формулу (14):

$$y'(x) =$$

$$C_1 \left(- \frac{(x-\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}(x-\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{(-1)^n \Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (x-\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right) +$$

$$C_2 \left(\frac{(x-\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(x-\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{\Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (x-\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right)$$

Знайдемо значення $y'(0)$

$$y'(0) =$$

$$C_1 \left(- \frac{(-\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}(-\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{(-1)^n \Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (-\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right) +$$

$$C_2 \left(\frac{(-\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(-\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{\Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (-\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right)$$

Отже, за формулою (2) знаходимо значення m -функції Вейля для

$$m(\lambda) = \frac{y'(0; \lambda)}{y(0; \lambda)} =$$

$$\frac{C_1 \left(- \frac{(-\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}(-\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{(-1)^n \Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (-\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right)}{C_1 A_i(-\lambda) + C_2 B_i(-\lambda)} + \frac{C_2 \left(\frac{(-\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(-\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{\Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (-\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right)}{C_1 A_i(-\lambda) + C_2 B_i(-\lambda)}.$$

Таким чином, для рівняння (12)

$$m(\lambda) = \begin{cases} \frac{C_1 \left(\frac{(\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}(\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{(-1)^n \Gamma(n+\frac{5}{6}) \Gamma(n+\frac{1}{6}) (\frac{3}{4})^n}{2\pi n! (\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right) + C_2 \left(\frac{(\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{\Gamma(n+\frac{5}{6}) \Gamma(n+\frac{1}{6}) (\frac{3}{4})^n}{2\pi n! (\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right)}{C_1 A_i(\lambda) + C_2 B_i(\lambda)}, & x < 0 \\ \frac{C_1 \left(\frac{(-\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}(-\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{(-1)^n \Gamma(n+\frac{5}{6}) \Gamma(n+\frac{1}{6}) (\frac{3}{4})^n}{2\pi n! (-\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right) + C_2 \left(\frac{(-\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(-\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{\Gamma(n+\frac{5}{6}) \Gamma(n+\frac{1}{6}) (\frac{3}{4})^n}{2\pi n! (-\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right)}{C_1 A_i(-\lambda) + C_2 B_i(-\lambda)}, & x > 0 \end{cases}$$

Доведено.

Теорема 4.2. Нехай задано індефінітний оператор Штурма-Ліувілля на проміжку $(-a; a)$ з потенціалом $q(x) = x + b$, $b \neq 0$. Тоді m -функція Вейля :

$$m(\lambda) = \begin{cases} \frac{C_1 \left(\frac{(b+\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}(b+\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{(-1)^n \Gamma(n+\frac{5}{6}) \Gamma(n+\frac{1}{6}) (\frac{3}{4})^n}{2\pi n! (b+\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right) + C_2 \left(\frac{(b+\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(b+\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{\Gamma(n+\frac{5}{6}) \Gamma(n+\frac{1}{6}) (\frac{3}{4})^n}{2\pi n! (b+\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right)}{C_1 A_i(b+\lambda) + C_2 B_i(b+\lambda)}, & x < 0 \\ \frac{C_1 \left(\frac{(b-\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}(b-\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{(-1)^n \Gamma(n+\frac{5}{6}) \Gamma(n+\frac{1}{6}) (\frac{3}{4})^n}{2\pi n! (b-\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right) + C_2 \left(\frac{(b-\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(b-\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{\Gamma(n+\frac{5}{6}) \Gamma(n+\frac{1}{6}) (\frac{3}{4})^n}{2\pi n! (b-\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right)}{C_1 A_i(b-\lambda) + C_2 B_i(b-\lambda)}, & x > 0 \end{cases}$$

Доведення.

Розглянемо рівняння:

$$-y'' + xy = \lambda \operatorname{sign} xy \quad (15)$$

Щоб знайти його m -функцію, маємо розглянути випадки:

$$\begin{cases} -y'' + (x+b)y = -\lambda y, & x < 0 \\ -y'' + (x+b)y = \lambda y, & x > 0 \end{cases}$$

1) Розглянемо випадок для $x > 0$

$$-y'' + (x+b)y = \lambda y$$

$$-y'' + (x+b-\lambda)y = 0$$

$$\text{Заміна: } x+b-\lambda = t.$$

$$y(x) = y(t-b+\lambda)$$

$$y'(x) = \tilde{y}'(t)(t-b+\lambda)'$$

$$y''(x) = (\tilde{y}')' = \tilde{y}''$$

$$-\tilde{y}'' + t\tilde{y} = 0.$$

$$\tilde{y}(t) = C_1 A_i(t) + C_2 B_i(t)$$

$$y(x) = C_1 A_i(x+b-\lambda) + C_2 B_i(x+b-\lambda)$$

$$y(0) = C_1 A_i(b-\lambda) + C_2 B_i(b-\lambda)$$

$$y'(x) = C_1 (A_i(x+b-\lambda))' \times (x+b-\lambda)' + C_2 (B_i(x+b-\lambda))' \times (x+b-\lambda)'$$

Оскільки $(x + b - \lambda)' = 1$, матимемо :

$$y'(x) = C_1(A_i(x + b - \lambda))' + C_2(B_i(x + b - \lambda))' \quad (16)$$

Знайдемо значення похідної $A_i'(x + b - \lambda)$ та $B_i'(x + b - \lambda)'$ з формул (3) та (4)

$$A_i'(x + b - \lambda) \sim - \frac{(x + b - \lambda)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}(x+b-\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 6n}{1 - 6n} \frac{(-1)^n \Gamma\left(n + \frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (x + b - \lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right]$$

$$B_i'(x + b - \lambda) \sim \frac{(x + b - \lambda)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(x+b-\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 6n}{1 - 6n} \frac{\Gamma\left(n + \frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (x + b - \lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right]$$

Підставимо їх значення у формулу (16):

$$\begin{aligned} y'(x) &= C_1 \left(- \frac{(x + b - \lambda)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}(x+b-\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 6n}{1 - 6n} \frac{(-1)^n \Gamma\left(n + \frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (x + b - \lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right) \\ &+ C_2 \left(\frac{(x + b - \lambda)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(x+b-\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 6n}{1 - 6n} \frac{\Gamma\left(n + \frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (x + b - \lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right) \end{aligned}$$

Знайдемо значення $y'(0)$

$$\begin{aligned} y'(0) &= \\ &C_1 \left(- \frac{(b-\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}(b-\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{(-1)^n \Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (b-\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right) + \\ &C_2 \left(\frac{(b-\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(b-\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{\Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (b-\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right) \end{aligned}$$

Всі необхідні значення знайдені, тому можемо обчислити m-функцію.

$$\begin{aligned} m(\lambda) &= \frac{y'(0;\lambda)}{y(0;\lambda)} = \\ &\frac{C_1 \left(- \frac{(b-\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}(b-\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{(-1)^n \Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (b-\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right)}{C_1 A_i(b-\lambda) + C_2 B_i(b-\lambda)} + \\ &\frac{C_2 \left(\frac{(b-\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(b-\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{\Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (b-\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right)}{C_1 A_i(b-\lambda) + C_2 B_i(b-\lambda)} \end{aligned}$$

Розглянемо випадок для $x < 0$

$$\begin{aligned} -y'' + (x + b)y &= -\lambda y \\ -y'' + (x + b + \lambda)y &= 0 \end{aligned}$$

Заміна: $x + b + \lambda = t$.

$$y(x) = y(t - b - \lambda)$$

$$y'(x) = \tilde{y}'(t)(t - b - \lambda)'$$

$$y''(x) = (\tilde{y}')' = \tilde{y}''$$

$$-\tilde{y}'' + t\tilde{y} = 0.$$

$$\tilde{y}(t) = C_1 A_i(t) + C_2 B_i(t)$$

$$y(x) = C_1 A_i(x + b + \lambda) + C_2 B_i(x + b + \lambda)$$

$$y(0) = C_1 A_i(b + \lambda) + C_2 B_i(b + \lambda)$$

$$y'(x) = C_1(A_i(x + b + \lambda))' \times (x + b + \lambda)' + C_2(B_i(x + b + \lambda))' \times (x + b + \lambda)'$$

Так, як $(x + b + \lambda)' = 1$, матимемо :

$$y'(x) = C_1(A_i(x + b + \lambda))' + C_2(B_i(x + b + \lambda))' \quad (17)$$

Знайдемо значення похідної $A_i'(x + b + \lambda)$ та $B_i(x + b + \lambda)'$

$$A_i'(x + b + \lambda) \sim - \frac{(x + b + \lambda)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}(x+b+\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 6n}{1 - 6n} \frac{(-1)^n \Gamma\left(n + \frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (x + b + \lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right]$$

$$B_i'(x + b + \lambda) \sim \frac{(x + b + \lambda)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(x+b+\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 6n}{1 - 6n} \frac{\Gamma\left(n + \frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (x + b + \lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right]$$

Підставимо їх значення у формулу (17):

$$\begin{aligned} y'(x) &= \\ &= C_1 \left(- \frac{(x + b + \lambda)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}(x+b+\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 6n}{1 - 6n} \frac{(-1)^n \Gamma\left(n + \frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (x + b + \lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right) \\ &+ C_2 \left(\frac{(x + b + \lambda)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(x+b+\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 6n}{1 - 6n} \frac{\Gamma\left(n + \frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (x + b + \lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right) \end{aligned}$$

Знайдемо значення $y'(0)$

$$\begin{aligned} y'(0) &= C_1 \left(- \frac{(b + \lambda)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}(b+\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 6n}{1 - 6n} \frac{(-1)^n \Gamma\left(n + \frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (b + \lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right) \\ &+ C_2 \left(\frac{(b + \lambda)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(b+\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + 6n}{1 - 6n} \frac{\Gamma\left(n + \frac{5}{6}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{6}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\pi n! (b + \lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right) \end{aligned}$$

Всі необхідні значення знайдені, тому можемо обчислити m -функцію за формулою (2).

$$m(\lambda) = \frac{y'(0;\lambda)}{y(0;\lambda)} = \frac{C_1 \left(\frac{(b+\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}(b+\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{(-1)^n \Gamma(n+\frac{5}{6}) \Gamma(n+\frac{1}{6}) (\frac{3}{4})^n}{2\pi n! (b+\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right)}{C_1 A_i(b+\lambda) + C_2 B_i(b+\lambda)} + \frac{C_2 \left(\frac{(b+\lambda)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}(b+\lambda)^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+6n}{1-6n} \frac{\Gamma(n+\frac{5}{6}) \Gamma(n+\frac{1}{6}) (\frac{3}{4})^n}{2\pi n! (b+\lambda)^{\frac{3n}{2}}} \right] \right)}{C_1 A_i(b+\lambda) + C_2 B_i(b+\lambda)}.$$

Доведено.

Список використаних джерел

1. B. Curgus, B. Najman, The operator $(sgnx)$ is similar to a selfadjoint operator in . – Proc. Amer. Math. Soc. 123. – 1995. – P 1125-1128.
2. A. Kostenko and G. Teschl, J. Differ. Equations 250, No. 9, 3701-3739
3. A. Kostenko, A. Sakhnovich, and G. Teschl, Weyl–Titchmarsh theory for Schrödinger operators with strongly singular potentials, Int. Math. Res. Not. 2011, Art. ID rnr065, 49pp (2011).

Мороз В.П.

магістрантка спеціальності «Математика»

факультету математики, інформатики та фізики НПУ імені М.П. Драгоманова

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. н., доц. Гончаренко Я.В.

АНАЛІЗ РИЗИКІВ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ПОКАЗНИКІВ, ЩО ВИЗНАЧАЮТЬ РОЗВИТОК ЛЮДСЬКОГО КАПІТАЛУ УКРАЇНИ

Анотація. В статті досліджено показники, які визначають розвиток людського капіталу України, проаналізувати ризики та тенденції інвестування в розвиток людського капіталу України.

Ключові слова: людський капітал, ризик, моделювання, статистичні методи.

Abstract. The article examines the indicators that determine the development of human capital in Ukraine, analyze the risks and trends of investing in the development of human capital in Ukraine.

Key words: human capital, risk, modeling, statistical methods.

На сучасному етапі наукові знання, інформація, професійний, культурний, фізичний потенціал суспільства, що складають у сукупності людський капітал визначає структуру національної економіки, якості виробленої продукції та послуг, ефективність функціонування господарства на всіх його організаційних рівнях.

В спеціальній літературі людський капітал визначається як «особливий вид капіталовкладення, сукупність витрат на розвиток відтворювального потенціалу людини, підвищення якості та покращення функціонування робочої сили. В склад об'єктів людського капіталу зазвичай включають знання загальноосвітнього та спеціального характеру, навички, накопичений досвід». В сучасному розумінні людський капітал – це сукупність знань, умінь та професійних навичок людини. Як будь-який капітал, людський капітал може бути розвиненим та примноженим. При цьому, з одного боку, він є основою для розвитку особистості його носія, з іншої сторони – об'єктом пильної уваги суспільства, в якому носій трудиться та розвивається. В примноженні людського капіталу зацікавлений, в першу чергу, його носій, в якому цей вид капіталу здатен приносити значні дивіденди у вигляді підвищення рівня життя [3].

Основними елементами людського капіталу є освіта та здоров'я (капітали освіти та здоров'я). Освіта та людський капітал тісно взаємопов'язані. Кожне покоління вчиться у попереднього покоління, самостійно отримує можливість спиратися на людський капітал своїх батьків, що призводить до збільшення тривалості часу, витраченого на шкільну освіту. Людський капітал, своєю чергою, фактично виконує функцію страхування від безробіття.

Людський капітал складається з базового капіталу (наприклад, спадкові характеристики, освіта батьків тощо) та набутого за рахунок зроблених інвестицій. Рівень освіти та стан здоров'я формують якісні характеристики капіталу, які визначають його величину та термін служби [4].

Освіта має вирішальне значення у формуванні капіталу здоров'я, тому капітал здоров'я найчастіше розглядається як результат освіти. Капітал здоров'я – це актив, що дозволяє його власнику якнайдовше використовувати за призначенням свій людський капітал. Здоров'я закладає основу його підтримки та розвитку. Якщо капітал знань впливає на продуктивність, то капітал здоров'я визначає сумарний час, який людина може витратити на виробничу діяльність та заробіток грошових коштів.

Формування та використання людського капіталу проводиться на трьох рівнях: індивідуальному (мікрорівень), корпоративному (мезорівень) та національному (макрорівень) [5]. Очевидно, що всі рівні взаємопов'язані, добробут індивіда визначає економічний добробут та фінансову безпеку всієї держави, оскільки людський капітал є фактором зростання ВВП.

Людський капітал – це актив, який формується протягом усього життя людини та використовується у виробничій діяльності з метою отримання доходу. Цей актив є джерелом доходу для свого носія та фактором формування прибутку суб'єктів господарювання. За аналогією з іншими видами капіталу, людський характеризується ліквідністю, терміном служби, амортизацією, здатністю до знецінення та потребою в інвестиціях. Базові властивості людського капіталу визначають його основні ризики: втрату працездатності, зниження (недоотримання) доходу, інвестиційний, виникнення витрат на підтримання (відновлення) здоров'я, зайнятість, смерть [5].

Людський капітал як актив характеризується рівнем ризику, тобто невизначеністю отримання прибутку у майбутньому [6]. Ця невизначеність поширюється як на час отримання доходу, так і на його величину. Неактуальне утворення призводить до зниження ліквідності та прибутковості людського капіталу. Небажання інвестувати в освіту та здоров'я може призвести до раннього знецінення капіталу, прискорення його амортизації.

Ризики людського капіталу впливають із його якісних та кількісних характеристик. Виявити ризики людського капіталу населення України на макрорівні можна на підставі аналізу даних про рівень захворюваності, інвалідизації, безробіття, виробничого травматизму, втрати робочого часу та ін.

На фінансових ринках існують безризикові активи, більш-менш ризиковані. На відміну від інших активів, людський капітал за своїми характеристиками не може бути безризиковим. Це пов'язано з тим, що носієм капіталу виступає людина, котрій ризики захворюваності і смертності є невід'ємними.

Дослідження ризиків людського капіталу має і практичну сферу застосування. Ризиковий характер людського капіталу знаходить своє відображення в економічній поведінці людини, зокрема позначається на управлінні фінансами, попиті на страхування, а також впливає на готовність господарюючих суб'єктів робити інвестиції у персонал.

Класифікація ризиків людського капіталу

З метою типологізації ризиків людського капіталу вважаємо за можливе використання найбільш поширених у ризик-менеджменті характеристик ризикових подій: об'єкт і джерело ризику, масштаб поширення наслідків ризикових ситуацій, рівень виникнення ризику, етап життєвого циклу людини, характер ризик-ефектів, сила впливу ризику, його придатність для страхування.

Об'єктами ризиків виступають витрати, пов'язані з необхідністю підтримки та розвитку людського капіталу, доходи, які можуть бути вилучені внаслідок його використання, а також результат інвестиції (інвестиційні ризики).

В основу класифікації за джерелами ризиків ми закладаємо компоненти, що формують індекс розвитку людського потенціалу. Відповідно до досліджень індекс обчислюється у трьох вимірах: здоров'я,

освіта, рівень життя. Таким чином, за критерієм компонентів людського капіталу його ризики поділяються на три групи: (1) ризики здоров'я, (2) ризики освіти та (3) ризики рівня життя (Рис.1).

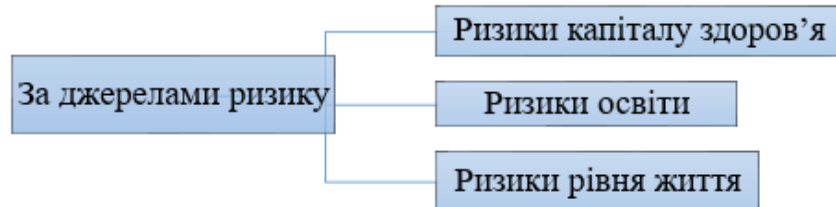


Рис.1

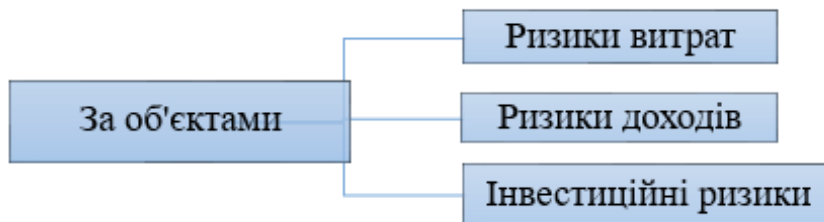


Рис.2

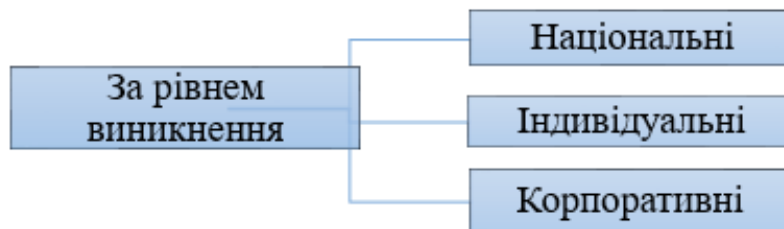


Рис.3

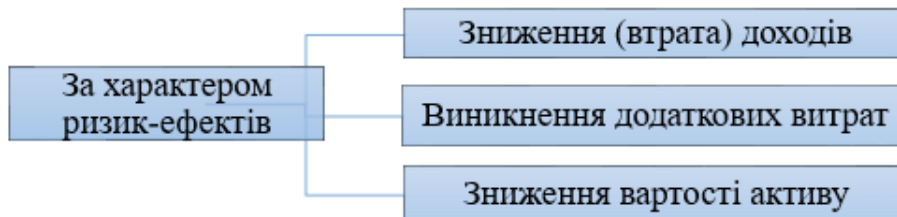


Рис.4



Рис.5

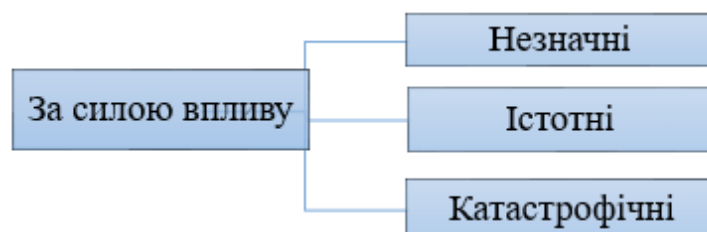


Рис.6

До ризиків здоров'я відносяться ймовірність захворювання та зниження (втрати) працездатності, тривалість життя. В якості ризик-факторів виступають висока вартість медичних послуг, рівень доходів, вік.

Ризики освіти проявляються у структурі зайнятості населення і відбиваються лише на рівні доходів. Ризик-факторами є незадовільна якість та структура освітніх програм та послуг, їхня висока вартість, відсутність попиту на конкретну спеціальність на ринку праці.

Ризики рівня життя є не самостійними, а результативними. Незадовільний рівень життя часто виникає через вплив на людський капітал ризиків здоров'я та освіти. Ризики рівня життя можна розглядати із двох позицій: (1) як ефект реалізації ризиків здоров'я та освіти; (2) як макроекономічний ризик. До ризиків рівня життя ми відносимо можливість несприятливих подій, що призводять до зниження доходу індивіда, за винятком ризиків освіти та здоров'я. Рівень життя визначається такими факторами, як реальний ВВП на душу населення, державні витрати на фінансування соціальної сфери; реальна заробітна плата; грошові

доходи та витрати населення; рівень споживання; середня тривалість життя та ін.

Моделювання ризиків

На основі аналізу результатів Human Development Report 2020 [1,2] програми розвитку ООН та відповідних статистичних показників для України проведемо аналіз індексів розвитку людського капіталу України статистичними методами.

Для проведення аналізу показників, ми зібрали статистичні дані, за ті роки, в які проводилося обчислення індексу людського розвитку Організацією Об'єднаних Націй, це 2005-2020 роки. Було взято основні показники, які представлені при обчисленні індексу людського розвитку.

Табл.1. Вхідні статистичні дані

Рік	Тривалість життя при народженні (роки)	Поточні витрати на охорону здоров'я (% ВВП)	Державні витрати на освіту (% ВВП)	ВВП на душу населення (2017 PPP \$)
2005	67,5	6,3	6,1	6977
2010	69,4	6,8	6,2	8245
2015	71,5	6,9	5,7	10164
2016	71,7	6,8	5,4	11148
2017	71,8	7,0	6	11871
2018	72	7,0	6,3	12634
2019	72,01	7,0	6,2	13350
2020	71,35	7,4	5,7	13057

Користуючись наступними формулами, було обчислено:

- Дисперсію $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}$,
- Середнє квадратичне відхилення $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$,
- Квадратичний коефіцієнт варіації $V_\sigma = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$,
- Середнє лінійне відхилення $l = \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|$,
- Лінійний коефіцієнт варіації $V_l = \frac{l}{\bar{x}} \cdot 100\%$.

Табл.2. Статистичні показники

	Тривалість життя при народженні (роки)	Поточні витрати на охорону здоров'я (% ВВП)	Державні витрати на освіту (% ВВП)	ВВП на душу населення (2017 PPP \$)
Середні значення	70,9075	6,9	5,95	10930,75
σ^2	2,609164	0,094286	0,1	5377048
σ	1,615291	0,30706	0,316228	2318,846
V_σ	2,278025	4,450142	5,314752	21,21397
l	1,22875	0,2	0,2625	1851,563
V_l	1,732891	2,898551	4,411765	16,93903

На основі коефіцієнтів V_σ і V_l можемо зробити висновки, що ступінь варіації показника тривалості життя є найменшим, що говорить про найнижчий ступінь ризику, а ступінь показника ВВП на душу населення є найвищим, але в той же час не перевищує 25%, що говорить про те, що він попадає в зону допустимого ризику.

Методи аналізу трендів

Побудуємо лінійні рівняння тренду для всіх досліджуваних показників, в результаті обчислень отримано таблицю 3.

Табл.3. Таблиця трендів

Показник	Рівняння тренду	Опис тенденції
Тривалість життя при народженні	$y = 0,3005x - 534,6$	Оскільки $k = 0,3005 > 0$, то в середньому тенденція до зростання.
Поточні витрати на охорону здоров'я	$y = 0,1095x + 6,4071$	Оскільки $k = 0,1095 > 0$, то в середньому тенденція до зростання.
Державні витрати на освіту	$y = -0,0048x + 5,9714$	Оскільки $k = -0,0048 < 0$, то в середньому тенденція до спадання.
ВВП на душу населення	$y = 907,36x + 6847,6$	Оскільки $k = 907,36 > 0$, то в середньому тенденція до зростання.

Побудуємо лінійну модель виду

$$y = a + bx_1 + cx_2 + dx_3,$$

де y – тривалість життя при народженні, x_1 – поточні витрати на охорону здоров'я, x_2 – державні витрати на освіту, x_3 – ВВП на душу населення.

В результаті обчислень (див. додаток А) отримано наступні результати:

- рівняння регресії

$$y = 70,2004 - 0,1631x_1 - 0,8548x_2 + 0,0006x_3,$$

де y – тривалість життя при народженні, x_1 – поточні витрати на охорону здоров'я, x_2 – державні витрати на освіту, x_3 – ВВП на душу населення.

- Коефіцієнт детермінації $R^2 = 0,8336 > 0,7$, що говорить про високий рівень адекватності моделі.
- Стандартна похибка рівняння $\sigma_e = 0,87$, а отже її значення є несуттєвим.
- Якщо перевірити модель за критерієм Фішера, отримаємо $F_{\text{емп.}} = 6,68$, отже приймається гіпотеза про адекватність моделі з рівнем значимості $0,05$, тобто надійність моделі рівна $0,95$.

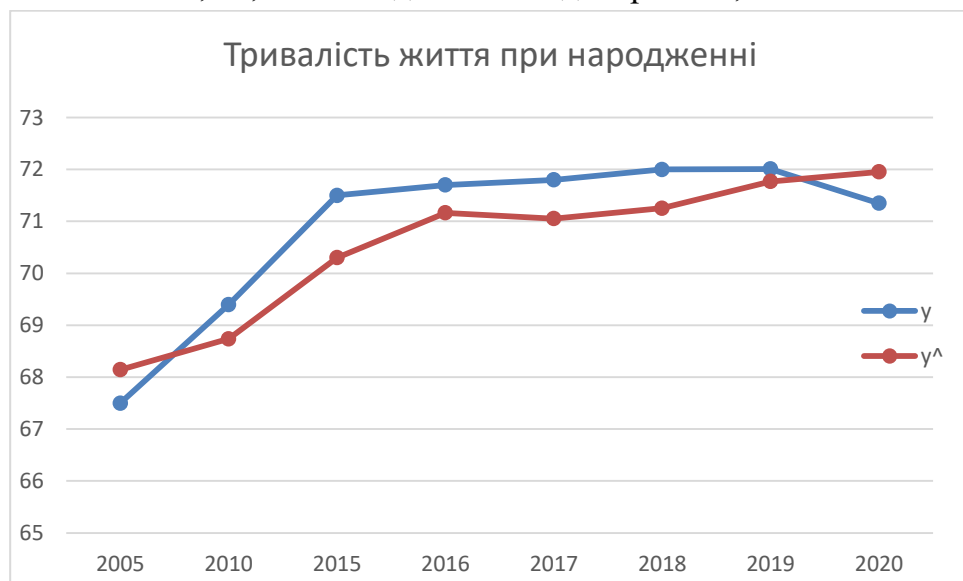


Рис.7

Враховуючи, що $b = -0,1631 < 0$ і $c = -0,8548 < 0$, можемо зробити висновки, що такі показники як витрати на охорону здоров'я та витрати на освіту не здійснювали позитивного впливу на збільшення середньої тривалості життя, а показник ВВП на душу населення ($d = 0,0006 > 0$) здійснював слабкий позитивний вплив на збільшення тривалості життя.

Модель динаміки валового формування капіталу.

Побудуємо модель залежності валового формування капіталу від витрат на охорону здоров'я, витрат на освіту та ВВП на душу населення.

Для цього розглянемо інший спосіб побудови моделі – рівняння експоненційного типу:

$$y = \alpha \cdot x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} x_3^{\beta_3},$$

де y – валове формування капіталу, x_1 – поточні витрати на охорону здоров'я, x_2 – державні витрати на освіту, x_3 – ВВП на душу населення.

Прологарифмувавши рівняння, отримаємо:

$$\ln y = \ln \alpha + \beta_1 \ln x_1 + \beta_2 \ln x_2 + \beta_3 \ln x_3.$$

Проаналізувавши його (див. додаток Б), ми отримаємо:

$$\ln \alpha = 15,021, \quad \beta_1 = -7,185, \quad \beta_2 = 0,062, \quad \beta_3 = 0,171.$$

Тобто

$$y = 15,021 \cdot x_1^{-7,185} x_2^{0,062} x_3^{0,171}.$$

Розглянемо еластичність показника y по всім змінним:

$$E_y(x_1) = \frac{dy}{dx_1} \cdot \frac{x_1}{y},$$

$$\frac{dy}{dx_1} = 15,021 \cdot x_2^{0,062} x_3^{0,171} \cdot (-7,185 \cdot x_1^{-8,185}),$$

$$E_y(x_1) = \frac{15,021 \cdot x_2^{0,062} x_3^{0,171} \cdot (-7,185 \cdot x_1^{-8,185}) \cdot x_1}{15,021 \cdot x_1^{-7,185} x_2^{0,062} x_3^{0,171}} = -7,185.$$

Аналогічно отримаємо :

$$E_y(x_2) = 0,062,$$

$$E_y(x_3) = 0,171.$$

Враховуючи отримані результати, можемо зробити висновок, що витрати на охорону здоров'я не є ефективним показником з точки зору збільшення валового формування капіталу, тобто вони не здійснювали позитивного впливу на валове формування капіталу, а державні витрати на освіту та ВВП на душу населення здійснював низький, але позитивний вплив.

Список використаних джерел

1. United nations development programme. Human development reports [Електронний ресурс] – <http://hdr.undp.org/en/2020-report>
2. Державна служба статистики України [Електронний ресурс] – <http://www.ukrstat.gov.ua>
4. Кравчук, Л. М. Капітал здоров'я як основна складова людського капіталу / Л. М. Кравчук // Сталий розвиток економіки. – 2011. – № 3. – С. 3-7.
6. Розвиток людського капіталу: на шляху до якісних реформ / Центр Разумкова. - Київ : Заповіт, 2018. - 368 с.
8. Ковальчук В.А. Інвестування в людський капітал як фактор інноваційного розвитку економіки України [Електронний ресурс] / В.А. Ковальчук, А.Ю. Шахно // Соціально-економічні проблеми і держава: електронне наук. фах. видання. — Тернопіль: ТНТУ ім. Івана Пулюя, 2016. — Випуск 2(15). — С. 33—40. — Режим доступу: <http://sepd.tntu.edu.ua/index.php/en/lastvolume/495>

Дубіна А.В., Пікуза О.В.

магістартки спеціальності «Математика»

факультету математики, інформатики та фізики НПУ імені М.П.Драгоманова

Науковий керівник: канд.фіз.-мат. наук, доц. **Гончаренко Я.В.**

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМУ ОПТИМІЗАЦІЇ ГРОШОВИХ ПОТОКІВ

Анотація. В роботі здійснено аналіз та програмну реалізацію алгоритму локального пошуку для розв'язання задач управління грошовими потоками на прикладі моделювання діяльності підприємства в сфері надання освітніх послуг.

Ключові слова: алгоритм локального пошуку, оптимізація грошових потоків, імітаційне моделювання.

Abstract. The analysis and software implementation of the local search algorithm for solving cash flow management problems on the example of modeling the enterprise in the field of educational services.

Keywords: local search algorithm, cash flow optimization, simulation modeling.

Алгоритм локального пошуку

Для NP-складних задач локальний пошук дозволяє знаходити наближені розв'язки і часто є єдиним можливим способом розв'язання задач, де точні методи безсилі через надто великий обсяг простору можливих розв'язків. Використання локального пошуку в комбінаторній оптимізації відбулося у 1956 році для розв'язування задачі комівояжера [1], а в наступні роки сфера використання локального пошуку була розширена та концепція алгоритму була застосована в різноманітних задачах. Для багатьох задач теорії розкладів, розміщення, покриття та інших задач алгоритми локального пошуку дозволяють отримувати кращі результати, в порівнянні з іншими алгоритмами, особливо за умови обмеження у часі. Розглянемо схему алгоритму [2].

1. Генерація початкового припустимого розв'язку x , який обираємо як поточний варіант.
2. Чергова ітерація.
3. Формуємо околі $L(x)$ поточного варіанта й точно чи наближено знаходимо елемент $y \in L(x)$, який є субоптимальним розв'язком у цьому околі. Якщо $y \neq x$, то знайдений елемент оголошується черговим поточним варіантом (здійснюється переприсвоєння $x \leftarrow y$) і починається чергова ітерація, інакше - повернення на п. 3.
4. Завершення роботи алгоритму: x - локальний розв'язок, якщо на останній ітерації здійснюється вичерпний пошук в околі.

Принциповими моментами реалізації конкретних алгоритмів локального пошуку є:

1. визначення околів $L(x)$;
2. генерація чергової точки околу $y \in L(x)$;
3. критерій завершення перегляду точок у поточному околі та переходу до наступного;
4. спосіб обчислення величини зміни цільової функції при переході до нового поточного варіанта;
5. критерій завершення;
6. формування початкового наближення.

Ефективність алгоритмів локального пошуку істотно залежить від вибору відповідного типу околу $L(x)$. Чим більше окіл, тим імовірніше отримати кращий результат, але розширення околів швидко стає непрактичним.

У п.1 використовуються метричні околи чи околи, які утворені алгоритмічно. Пошук в околі може бути здійснений шляхом повного перебору сусідніх точок, або здійснити перехід до першого знайденого варіанта, який поліпшує цільову функцію.

Для організації перебору точок околу при переході до нової ітерації використовують лінійний генератор або кільцевий генератор.

Критерієм завершенням локального пошуку може бути одна із умов: вичерпання ліміту часу або заданої кількості ітерацій, відсутність поліпшуючої точки в поточному околі.

Наведемо псевдокод алгоритму задачі розміщення прямокутників:

- 1 **procedure** local_search
- 2 $x^0 :=$ деякий припустимий розв'язок;
- 3 $h := 0$;
- 4 **while** окіл $L(x^h)$ поточного варіанта x^h не переглянутий повністю або не вичерпаний часовий ліміт **do**
- 5 $y :=$ генерація чергової точки околу $L(x^h)$;
- 6 $\Delta = f(x^h) - f(y)$;
- 7 **if** $\Delta > 0$ **then**
- 8 $h := h + 1$;
- 9 $x^h := y$;

```
10 end if;  
11 end while;  
12 return  $x := x^h$ ;  
13 end
```

Примітки:

У рядку 2 припустимий розв'язок – початкова перестановка.

У рядку 4 окіл поточного варіанта визначається з множини перестановок, отриманих шляхом транспозиції елементів поточної перестановки.

Перегляд точок поточного околу завершується і здійснюється перехід до наступної ітерації, коли знаходиться перший же розв'язок, який покращує значення цільової функції, що і відображено у рядках 7-10.

Значенням цільової функції для даного розв'язку (перестановки) є правий край найвіддаленішого від початку прямокутника у розміщенні, яке побудоване зазначеною процедурою (placement).

Критерієм завершення алгоритму вважаємо такі умови:

- відсутність поліпшуючої точки в околі поточного розв'язку;
- вичерпання заданого ліміту часу.

Генерування точок околу поточної розв'язку здійснюється шляхом транспозицій його компонентів. При переході до нової ітерації процес генерування продовжується, починаючи з тієї транспозиції, на якій завершився процес у попередньому околі, а при досягненні останньої пари компонент транспозиції починаються із компонент 1 і 2, якщо перегляд точок в околі не завершено.

Нехай на ітерації h маємо перестановку $x^h = (x_1, \dots, x_n)$, а $y \in L(x^h)$ утворюється із x^h шляхом транспозиції компонент i та j , $i \neq j$. Тоді покладаємо $x^{h+1} = y$ і генерування точок із околу $L(x^{h+1})$ починаємо із транспозиції i та $j+1$, якщо $j < n$, або ж присвоюємо $i=1, j=2$ в іншому разі. При цьому слід підраховувати кількість згенерованих точок околу, щоб вона не перевищила C_n^2 – кількості всіх точок околу при такому його означенні, що і використовується в одній із умов завершення роботи алгоритму.

Програмна реалізація алгоритму локального пошуку

Для проведення експериментальних досліджень була програмно реалізована інформаційна система CalculateIT версії Local search.

Інформаційна система складається з комплексу базових функцій планування та оптимізації грошових потоків. Систему можуть використовувати одночасно 15 людей незалежно один від одного.

Вимоги до технічних засобів:

а) комп'ютер:

- 1) частота процесора – 2.0 ГГц ;
- 2) об'єм накопичувача – 128 Гб;
- 3) об'єм оперативної пам'яті – 2 Гб;
- 4) кількість ядер – 4.

б) встановлене програмне забезпечення:

- 1) операційна система Windows 7/8/10;
- 2) MS SQL сервер та MS SQL Management Studio/Heidi SQL;
- 3) .NET Framework 4.8;
- 4) Visual Studio / Visual Code;
- 5) MS Excel.

в) комплектація комп'ютерної периферії:

- 1) мишка дротова/бездротова;
- 2) клавіатура стандартна;
- 3) монітор.

Наведемо інструкцію користування інформаційною системою далі.

Під час запуску додатку відображається головне вікно з інформацією про програмі та її версію (рис. 1).

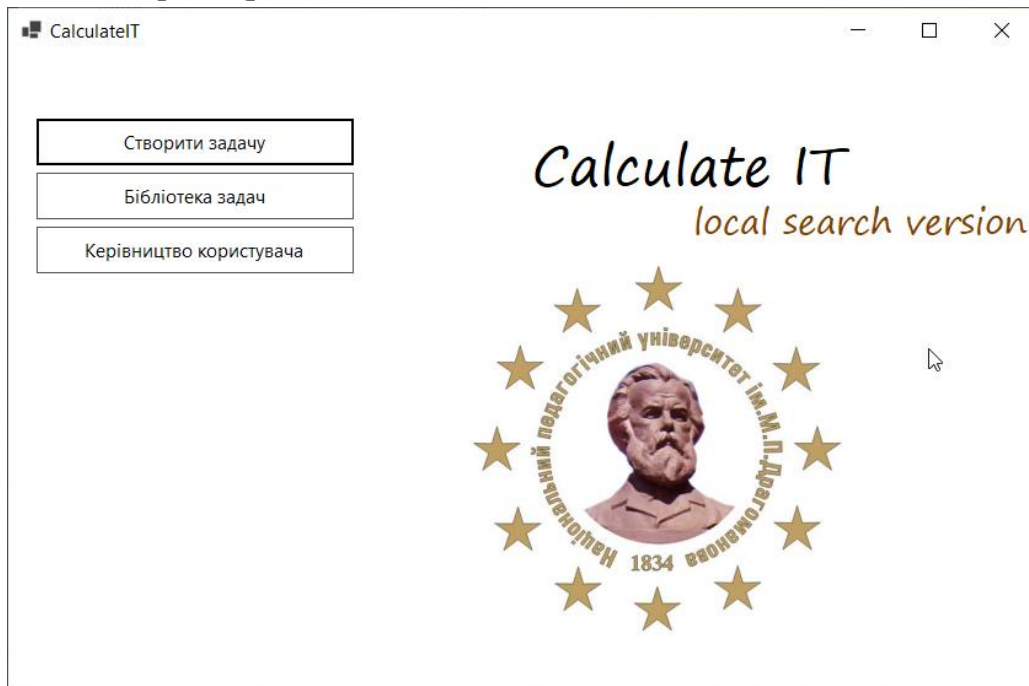


Рис. 1. Головне вікно програми

Для задання інформації про підприємство з послугами та витратами необхідно натиснути один раз на кнопку «Створити задачу».

Для перегляду існуючих задач необхідно натиснути один раз на кнопку «Бібліотека задач».

Для перегляду інструкції користувача програмним забезпеченням необхідно натиснути один раз на кнопку «Керівництво користувача».

Для того, щоб створити задачу для подальшого розв'язування, необхідно ввести інформацію про підприємство (рис. 2):

- вказати назву компанії;
- вказати розрахунковий період (натуральне число);
- обрати місяць розрахункового періоду з переліку;
- вказати рік розрахункового періоду (число);
- вказати кількість послуг, які надає підприємство (довільне натуральне число);
- вказати кількість витрат, передбачених підприємством (довільне натуральне число);
- вказати максимальну кількість послуг, які надає компанія в день (довільне ціле додатне число).

Додавання підприємства

Додати підприємство

Назва

Розрахунковий період

Місяць

Рік

Кількість послуг*

Кількість витрат*

Максимальна кількість послуг в день

* у розрахунковому періоді

Зберегти

Рис. 2. Інформація про підприємство

Після створення підприємства, необхідно надати інформацію про послуги (рис. 3):

- вказати назву послуги;
- вказати кількість послуг на періоді (довільне натуральне число);

- відмітити одноразову оплату послуг у випадку, якщо необхідно оплатити одразу всі послуги;
- вказати вартість (за всі послуги або одноразова оплата послуг, без вказування валюти);
- вказати максимальну кількість клієнтів для надання послуги (довільне натуральне число);
- вказати перерву між надання послуги (довільне натуральне число чи нуль);
- вказати неможливі дні надання послуг через пробіл (натуральні числа) або залишити поле порожнім.

Додати послугу

Додати послугу | CALCULATEIT

Назва послуги

Кількість послуг на періоді

одноразова оплата послуг

Вартість за 1 послугу

Максимальна кількість клієнтів

Найменша перерва між наданням послуги

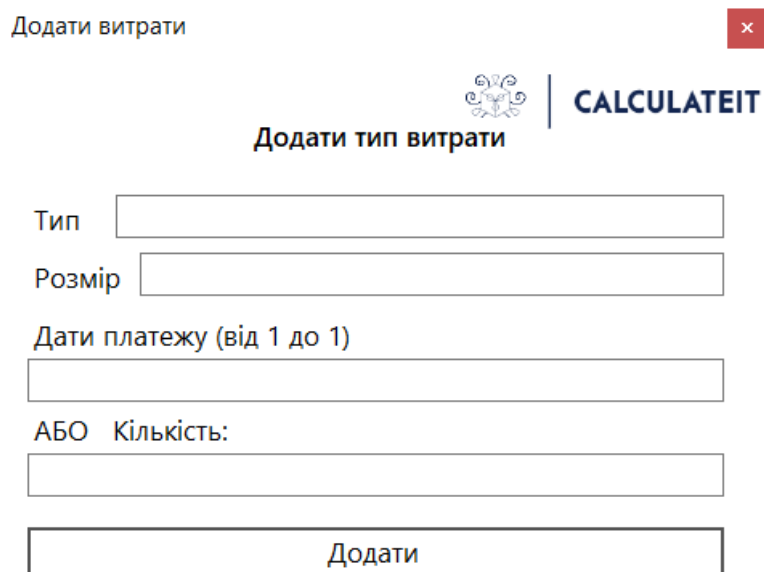
Неможливі дні надання послуг (вкажіть через пробіл від 1 до 1)

Додати послугу

Рис. 3. Інформація про послугу

Після введення інформації про всі послуги необхідно надати інформацію про заплановані витрати (рис. 4):

- вказати тип витрати (заробітна плата, інтернет чи комунальні послуги, тощо);
- вказати розмір витрати (довільне додатне число без валюти);
- задати параметри платежів (одне з наведених):
 - вказати дати платежів через пробіл (натуральні числа);
 - вказати кількість виплат (натуральне число).



Додати витрати

Додати тип витрати

Тип

Розмір

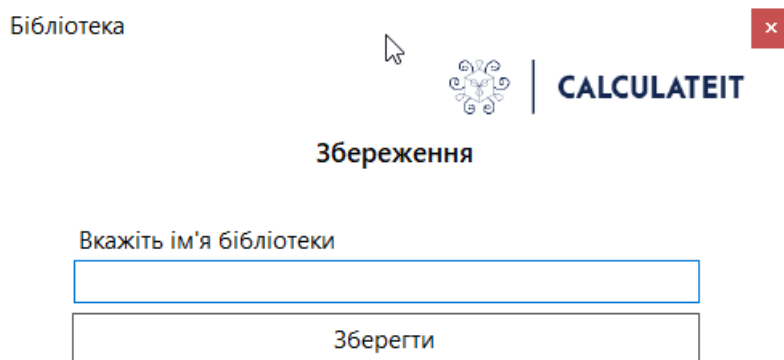
Дати платежу (від 1 до 1)

АБО Кількість:

Додати

Рис. 4. Дані про витрати

Після додавання всіх послуг та витрат, необхідно ввести назву бібліотеки (англійською, без розширення) для збереження файлу вхідних даних (рис. 5). «Бібліотека» – це текстовий файл, у якому зберігаються введені дані задачі у форматі “JSON”.



Бібліотека

Збереження

Вкажіть ім'я бібліотеки

Зберегти

Рис. 5. Збереження задачі

Для перегляду задач необхідно натиснути на кнопку «Бібліотека задач» і відкриється вікно із списком створених задач (рис. 6). Для того, щоб переглянути вхідні дані задачі, необхідно обрати файл із переліку та натиснути на нього. У вікні з'явиться опис обраної задачі :інформація про підприємство, послугу та витрати, тощо.

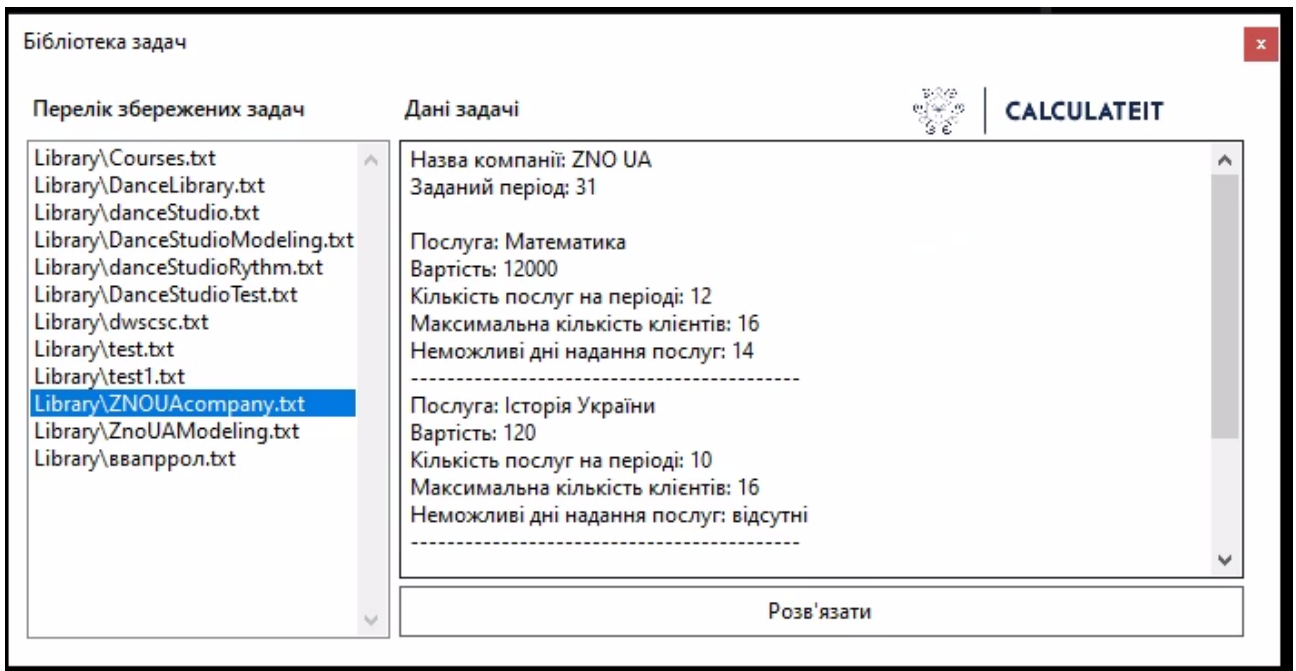


Рис. 6. Бібліотека задач

Натиснувши кнопку «Розв'язати» у вікні в спеціальному полі відображається інформація про розплановані послуги та автоматично створюється файл з розширенням «.xlsx» (рис. 7).

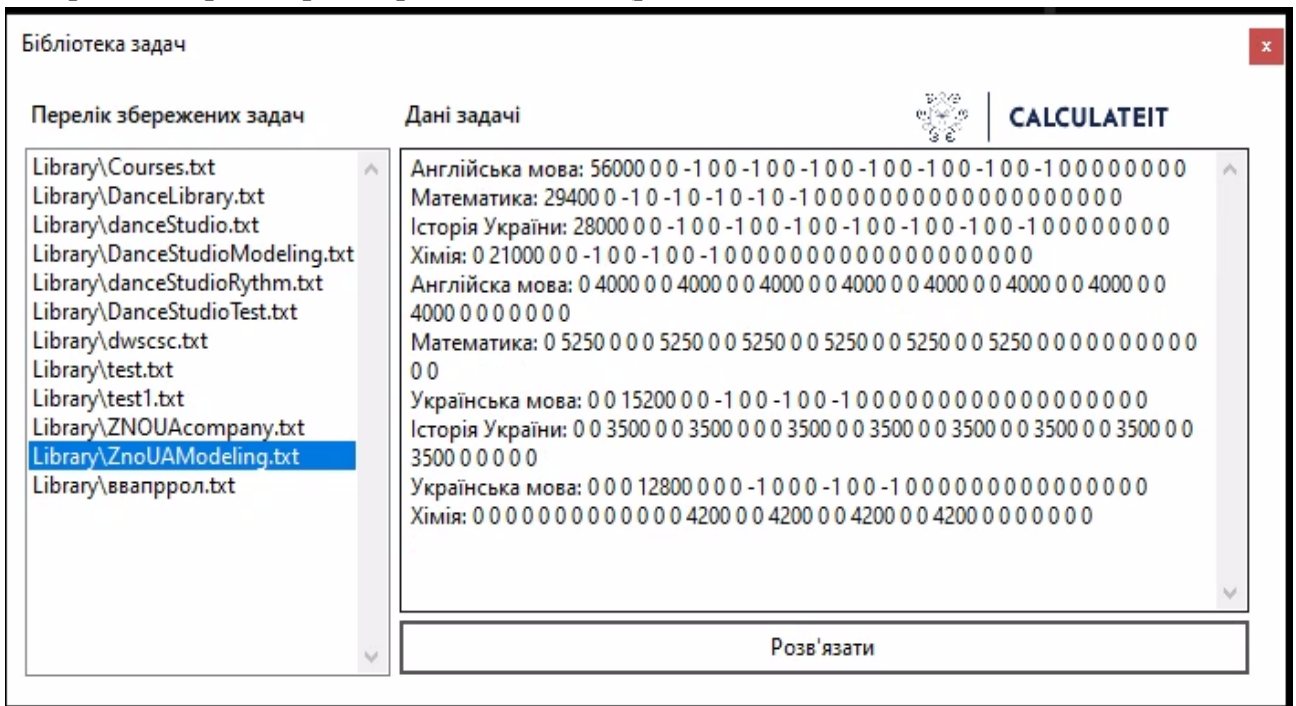


Рис. 7. Розв'язання задачі

На рис. 8.1 та рис. 8.2. наведено приклад звіту, утвореного інформаційною системою.

Студентські фізико-математичні етюди, 2021, № 21

Назва компанії:	ЗНО ЮА													
Звітний період планування	Вересень, 2021													
Днів у звітному періоді	30													
Код	61e82eba-b20c-4846-81d7-9e68a0a558d5													
Послуга/Період	Вересень 2021													
Дата	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Доходи	113400	30250	18700	12800	4000	8750	0	4000	5250	3500	4000	5250	3500	8200
Англійська мова	56000													
Математика	29400													
Історія України	28000													
Хімія		21000												
Англійська мова		4000			4000			4000			4000			4000
Математика		5250				5250			5250			5250		
Українська мова			15200											
Історія України			3500			3500				3500			3500	
Українська мова				12800										
Хімія														4200
Операційні витрати	56695	20156	877	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Оренда приміщення	36344													
Заробітна плата	19279	19279												
Доставка	877	877	877											
Інтернет послуги	195													
ЕВІТДА	56705	10094	17823	12800	4000	8750	0	4000	5250	3500	4000	5250	3500	8200
Податки та відрахування	25826	2389,5	935	640	200	437,5	0	200	262,5	175	200	262,5	175	410
	56695	20156	877	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Дохід ФОП	5670	1512,5	935	640	200	437,5	0	200	262,5	175	200	262,5	175	410
Чистий прибуток	30879	7704,5	16888	12160	3800	8312,5	0	3800	4987,5	3325	3800	4987,5	3325	7790
Накопичуваний прибуток	30879	38583,5	55471,5	67631,5	71431,5	79744	79744	83544	88531,5	91856,5	95656,5	100644	103969	111759

Рис. 8.1. Приклад звіту

Послуга/Період	Вересень 2021																													
Дата	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	Всього												
Доходи	8200	5250	3500	8200	5250	3500	8200	0	3500	8200	0	3500	0	0	0	0	0	270700	100%											
Англійська мова																		56000	20,69%											
Математика																		29400	10,86%											
Історія України																		28000	10,34%											
Хімія																		21000	7,76%											
Англійська мова	4000			4000			4000			4000								32000	11,82%											
Математика		5250			5250													31500	11,64%											
Українська мова																		15200	5,62%											
Історія України			3500			3500			3500			3500						28000	10,34%											
Українська мова																		12800	4,73%											
Хімія	4200			4200			4200			4200								16800	6,21%											
Операційні витрати	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	77728	28,70%											
Оренда приміщення																		36344	13,42%											
Заробітна плата																		38558	14,24%											
Доставка																		2631	0,97%											
Інтернет послуги																		195	0,07%											
ЕВІТДА	8200	5250	3500	8200	5250	3500	8200	0	3500	8200	0	3500	0	0	0	0	0	192972	71,30%											
Податки та відрахування	410	262,5	175	410	262,5	175	410	0	175	410	0	175	0	0	0	0	0	34568	12,77%											
	56695	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	77728	28,70%											
Дохід ФОП	410	262,5	175	410	262,5	175	410	0	175	410	0	175	0	0	0	0	0	13535	5,00%											
Чистий прибуток	7790	4987,5	3325	7790	4987,5	3325	7790	0	3325	7790	0	3325	0	0	0	0	0	158404	58,50%											
Накопичуваний прибуток	111759	116746,5	120071,5	127861,5	132849	136174	143964	143964	147289	155079	155079	158404	158404																	

Рис. 8.2. Приклад звіту

На рис. 9 наведено текстовий файл із вхідними параметрами задачі в форматі «JSON». Для того, щоб змінити вхідні дані досить відредагувати файл та зберегти його. Інформація, яка введена не англійською мовою відображається спеціальними символами.


```

1 {
2   "Id": "4df3766d-ee68-4a34-a0cc-f1665af64b4c",
3   "Name": "\u0422\u0430\u043d\u0446\u044e\u0432\u043b\u044c\u0430\u0430\u0441\u0442\u0430\u0442\u0430\u0442\u0430",
4   "Period": 30,
5   "Month": "\u0411\u0435\u0440\u0435\u0437\u0435\u043d\u044c",
6   "Year": "2021",
7   "NumberServices": 0,
8   "NumberCosts": 0,
9   "MaxServices": 3,
10  "Services": [
11    {
12      "Id": "e2401241-731c-4275-b669-11462c2eabd3",
13      "Name": "\u0412\u0430\u043b\u044c\u0441\u0442\u0430",
14      "Price": 350,
15      "IsOnePaid": false,
16      "Days": [],
17      "MacPays": 15,
18      "NumberForPeriod": 6,
19      "Priority": 0,
20      "minDelay": 2
21    },
22    {
23      "Id": "df91a03e-ac50-44c5-856e-bb91a5255172",
24      "Name": "\u0412\u0430\u043b\u044c\u0441\u0442\u0430",
25      "Price": 4900,
26      "IsOnePaid": true,
27      "Days": [],
28      "MacPays": 14,
29      "NumberForPeriod": 6,
30      "Priority": 0,
31      "minDelay": 2
32    },
33    {
34      "Id": "8a43a228-72d3-4c17-978d-b7f3e20134a6",
35      "Name": "\u0411\u0430\u043b\u0435\u0442\u0430",
36      "Price": 500,
37      "IsOnePaid": false,
38      "Days": [],
39      "MacPays": 7,
40      "NumberForPeriod": 8,
41      "Priority": 0,
42      "minDelay": 2
43    },
44    {
45      "Id": "d831e664-9246-48f0-8e2e-e88947db01e8",
46      "Name": "\u0411\u0430\u043b\u0435\u0442\u0430",
47      "Price": 6500,
48      "IsOnePaid": true,
49      "Days": [],
50      "MacPays": 13,
51      "NumberForPeriod": 8,
52      "Priority": 0,
53      "minDelay": 2
54    },
55    {
56      "Id": "75e0ae64-32b3-4ab3-b7dd-7386929064cf",
57      "Name": "\u0422\u0430\u043b\u044c\u0442\u0430",
58      "Price": 300
59    }
60  ]
61 }

```

Рис. 9. Приклад вхідних даних задачі

Імітаційне моделювання алгоритму локального пошуку

Для дослідження оптимальності розглянутого алгоритму проведемо експериментальне дослідження на основі реальної задачі.

Розглянемо освітню компанію, яка надає 10 послуг та заплановано 4 витрат на періоді, який складається з 30 днів.

Задача – організувати ефективне управління грошовими потоками та максимальний прибуток курсів за рахунок:

- раціонального формування груп за видами предметів, кількістю учнів та викладачів, формою відвідування та оплати;
- створення зручного розкладу занять, що забезпечить максимальне заповнення груп та оптимальну завантаженість викладачів з урахуванням вхідних даних.

Опис параметрів послуг наведено у таблиці 2.

Таблиця 2. Опис послуг

Назва	Кількість бажаючих		Відсоток бажаючих групових занять	Вартість послуги		Кількість занять на періоді
	Від	До		При кожному наданні послуги	При одноразовій оплаті	
Математика	20	30	50%	350	4900	6
Англійська мова	20	36	45%	200	3200	4
Українська мова	16	26	51%	350	3850	8
Історія України	15	23	65%	500	6500	8
Хімія	18	28	54%	350	4200	4

Опис параметрів витрат наведено у таблиці 3.

Таблиця 3. Опис параметрів витрат

Назва	Математичне сподівання	Середньо-квадратичне відхилення	Кількість виплат на періоді
Заробітна плата	20000	2000	2
Оренда приміщення	4000	8000	1
Інтернет послуги	200	40	1
Доставка	1000	325	3

Для створення задачі, необхідно надати інформацію про послуги: генератором випадкових чисел генерується кількість бажаючих скористатись послугами. Для генерації використовується рівномірний розподіл. Отримавши загальне число бажаючих необхідно розподілити їх на дві категорій: охочі відвідувати заняття з оплатою наперед за усі заняття, або з оплатою за кожне заняття окремо.

Для отримання інформації про витрати, необхідно згенерувати генератором випадкових чисел вартість витрат. Для генерування використовуючи нормальний розподіл та задані параметри.

Розглянемо суть імітаційного моделювання випадкової величини з заданим типом розподілу. Нехай маємо функцію розподілу $f(x)$ та значення, отримане генератором випадкових чисел K , необхідно розв'язати рівняння:

$$f(x) = K$$

В нашому випадку маємо нормальний розподіл і нашу функцію розподілу представляємо наступним чином:

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Отже, випадкову величину x можна знайти за наступною формулою:

$$x = -2\ln(K/2) +$$

В рамках планування та оптимізації грошових потоків для кожної задачі проводяться автоматизовані розрахунки фінансових показників, зокрема:

- Виручка від операційної діяльності та щомісячні витрати підприємства;
- EBITDA, що обчислюється як різниця між сумою отриманої виручки та сумою витрат підприємства за той же період;
- Податки та відрахування з заробітної плати за ставкою 41,5%, що включає: 22% ЄСВ (єдиний соціальний внесок), 18% ПДФО (податок з доходу фізичних осіб) та 1,5% військовий збір;
- Податок з доходу суб'єкта господарювання - фізичної особи підприємця 3-ї групи, яким у нашому випадку наведена у прикладі освітня компанія, за ставкою 5% з усієї суми отриманого доходу (виручки);
- Чистий прибуток (збиток) освітньої компанії після сплати всіх податків та зборів, який отримує компанія на кінець кожного операційного дня та накопичувано за розрахунковий період.

Відповідно до наданих параметрів послуг та витрат згенеровано 20 задач з різними початковими даними та прогнозом витрат. Результати підрахунку чистого прибутку для кожної із задач наведено на рис. 10.1. та рис. 10.2.

RESULT	36718	68970	32915	8787,5	3610	7315	8787,5	2610	6315	8787,5	3610	7315	8787,5	-6376	3325	8787,5	0	3325	3800	0	3325	3800	-200	3325	0	0	-40000	0	-26326	0	161314
RESULT	36053	63270	29728	8122,5	2470	5985	8122,5	2470	5985	8122,5	2470	-23315	8122,5	13300	2992,5	8122,5	-40000	2992,5	3800	0	2993	3800	0	-26308	0	0	-1000	0	0	0	128298
RESULT	31588	67260	29593	-20490	3420	5652,5	7647,5	3420	4653	-32353	3420	-22485	7647,5	13300	2660	6647,5	0	2660	3325	0	2660	3325	0	2660	0	0	-1000	0	-200	0	125010
RESULT	36243	58330	30590	-19988	-31749	6650	8312,5	2850	-21650	8312,5	1850	6650	8312,5	18620	2660	8312,5	0	2660	3125	0	1660	3325	0	2660	0	0	-1000	0	0	0	136736
RESULT	35103	55480	35910	-25181	2280	6650	7172,5	2280	5650	7172,5	2280	6650	7172,5	13630	3657,5	-21128	0	3466,7	1850	0	3658	-25450	0	3657,5	0	0	0	0	0	0	131960
RESULT	29973	49020	38903	6032,5	2660	6294,2	5838,1	1972	-33706	6032,5	2660	6982,5	6032,5	14630	3990	6032,5	0	3990	2375	0	3990	2375	0	-23904	0	0	-27894	0	0	0	114278
RESULT	31255	60468	33583	7315	2660	6794,8	-32685	2660	6983	7315	2660	6270,8	7315	-9680	3325	7315	0	3325	3325	0	2613	3325	0	3325	0	0	-28300	0	0	0	131167
RESULT	30638	49970	-432,5	6697,5	2850	7647,5	6697,5	2850	7648	6697,5	2850	7647,5	6697,5	18620	3990	-20493	0	3990	2175	0	3990	2375	0	3990	0	-836,5	-836,5	0	-27191	0	128231
RESULT	31255	65930	35245	7315	2850	-20180	-32685	2850	5985	7315	2850	4985	7315	13300	3325	7315	0	3325	3325	0	3325	-22840	0	3325	-174	-1000	-1000	0	0	0	133257
RESULT	36385	62130	13299	-31545	1132,7	7315	7497,7	2090	7315	8455	2090	7315	8455	15960	3990	8455	-170,7	3990	3800	0	-22903	3800	0	3990	0	0	0	0	0	0	152845
RESULT	33108	60420	35245	7172,5	-23118	5985	-19366	-33105	5985	7172,5	3420	5985	6233,3	12361	3325	6972,5	0	3325	2850	0	3325	2850	0	2385,8	0	0	0	0	0	0	132531
RESULT	35910	15670	36243	6980	2470	6982,5	-21320	2470	6983	7980	2470	6982,5	7980	-9680	3325	7980	0	2325	3325	-160,6	3325	3325	0	3325	0	0	0	0	0	0	134889
RESULT	36053	67414	32918	8122,5	-23624	6117,5	8122,5	3610	6318	8122,5	3610	6317,5	8122,5	14630	3325	8122,5	0	2528,8	3800	0	3325	3800	0	3325	0	0	0	-28030	-40000	0	146049

Рис. 10.1. Результати розрахунку чистого прибутку для згенерованих задач (частина 1)

RESULT	36718	68970	32915	8787,5	3610	7315	8787,5	2610	6315	8787,5	3610	7315	8787,5	-6376	3325	8787,5	0	3325	3800	0	3325	3800	-200	3325	0	0	-40000	0	-26326	0	161314	
RESULT	36053	63270	29728	8122,5	2470	5985	8122,5	2470	5985	8122,5	2470	-23315	8122,5	13300	2992,5	8122,5	-40000	2992,5	3800	0	2993	3800	0	-26308	0	0	-1000	0	0	0	128298	
RESULT	31588	67260	29593	-20490	3420	5652,5	7647,5	3420	4653	-32353	3420	-22485	7647,5	13300	2660	6647,5	0	2660	3325	0	2660	3325	0	2660	0	0	-1000	0	-200	0	125010	
RESULT	36243	58330	30590	-19988	-31749	6650	8312,5	2850	-21650	8312,5	1850	6650	8312,5	18620	2660	8312,5	0	2660	3125	0	1660	3325	0	2660	0	-1000	0	0	0	0	136736	
RESULT	35103	55480	35910	-25181	2280	6650	7172,5	2280	5650	7172,5	2280	6650	7172,5	13630	3657,5	-21128	0	3466,7	1850	0	3658	-25450	0	3657,5	0	0	0	0	0	0	131960	
RESULT	29973	49020	38903	6032,5	2660	6294,2	5838,1	1972	-33706	6032,5	2660	6982,5	6032,5	14630	3990	6032,5	0	3990	2375	0	3990	2375	0	-23904	0	-27894	0	0	0	0	114278	
RESULT	31255	60468	33583	7315	2660	6794,8	-32685	2660	6983	7315	2660	6270,8	7315	-9680	3325	7315	0	3325	3325	0	2613	3325	0	3325	0	3325	0	-28300	0	0	0	131167
RESULT	30638	49970	-432,5	6697,5	2850	7647,5	6697,5	2850	7648	6697,5	2850	7647,5	6697,5	18620	3990	-20493	0	3990	2175	0	3990	2375	0	3990	0	-836,5	-836,5	0	-27191	0	128231	
RESULT	31255	65990	35245	7315	2850	-20180	-32685	2850	5985	7315	2850	4985	7315	13300	3325	7315	0	3325	3325	0	3325	-22840	0	3325	-174	-1000	-1000	0	0	0	133257	
RESULT	36385	62130	13299	-31545	1132,7	7315	7497,7	2090	7315	8455	2090	7315	8455	15960	3990	8455	-170,7	3990	3800	0	-22903	3800	0	3990	0	0	0	0	0	0	152845	
RESULT	33108	60420	35245	7172,5	-23118	5985	-19366	-33105	5985	7172,5	3420	5985	6233,3	12361	3325	6972,5	0	3325	2850	0	3325	2850	0	2385,8	0	0	0	0	0	0	132531	
RESULT	35910	15670	36243	6980	2470	6982,5	-21320	2470	6983	7980	2470	6982,5	7980	-9680	3325	7980	0	2325	3325	-160,6	3325	3325	0	3325	0	0	0	0	0	0	134889	
RESULT	36053	67414	32918	8122,5	-23624	6117,5	8122,5	3610	6318	8122,5	3610	6317,5	8122,5	14630	3325	8122,5	0	2528,8	3800	0	3325	3800	0	3325	0	0	0	-28030	-40000	0	146049	

Рисунок 10.2. Результати розрахунку чистого прибутку для згенерованих задач (частина 2)

Найбільший чистий прибуток був отриманий у першій задачі. Наведемо вхідні параметри задачі та розплануємо надання послуги та витрати інформаційною системою, яка використовує алгоритм локального пошуку. У таблиці 4 наведено кількість клієнтів на задані послуги.

Таблиця 4. Кількість клієнтів

Назва	Кількість клієнтів	
	Одноразова оплата	Оплата на кожному занятті
Математика	14	15
Англійська мова	14	18
Українська мова	16	19
Історія України	10	10
Хімія	15	12

У таблиці 5 наведемо згенеровані вартості витрат.

Таблиця 5. Витрати

Назва витрати	Вартість (грн)
Заробітна плата	19279
Інтернет послуги	195
Оренда приміщення	36344
Доставка	877.90

Для формування плану надання послуг та витрат скористаємося алгоритмом локального пошуку. Фрагмент отриманого звіту наведений на рис. 11.

Назва компанії:	ЗНО ЮА														
Звітний період планування	Вересень, 2021														
Днів у звітному періоді	30														
Код	61e82eba-b20c-4846-81d7-9e68a0a558d5														
	* ячейки згруповано для наглядності														
Послуга/Період	Вересень 2021														
Дата	1	2	3	4	5	6	7	8 - 12*	21	22	23	24	25	26 - 30*	Всього
Доходи	113400	30250	18700	12800	4000	8750	0	0	0	3500	8200	0	3500	0	270 700 100%
Англійська мова	56000		-			-			-						56 000 20,69%
Математика	29400		-	-		-									29 400 10,86%
Історія України	28000			-		-			-						28 000 10,34%
Хімія		21000		-											21 000 7,76%
Англійська мова		4000			4000						4000				32 000 11,82%
Математика		5250				5250									31 500 11,64%
Українська мова			15200			-									15 200 5,62%
Історія України			3500			3500				3500			3500		28 000 10,34%
Українська мова				12800											12 800 4,73%
Хімія											4200				16 800 6,21%
Операційні витрати	56695	20156	877	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	77 728 100%
Оренда приміщення	36344														36 344 46,76%
Заробітна плата	19279	19279													38 558 49,61%
Доставка	877	877	877												2 631 3,38%
Інтернет послуги	195														195 0,25%
EBITDA	56705	10094	17823	12800	4000	8750	0	0	0	3500	8200	0	3500	0	192 972
Податки та відрахування	25826	2389,5	935	640	200	437,5	0	0	175	410	0	175			34 568
56695	20156	877	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			77 728 41,5%
Дохід ФОП	5670	1512,5	935	640	200	437,5	0	0	175	410	0	175			13 535 5%
Чистий прибуток	30879	7704,5	16888	12160	3800	8312,5	0	0	3325	7790	0	3325	0	158 404	
Накопичуваний прибуток	30879	38583,5	55471,5	67631,5	71431,5	79744	79744	143964	147289	155079	155079	158404	158404		

Рис. 11. Фрагмент результатів роботи програми

Чистий прибуток, який був отриманий інформаційною системою не набуває від'ємних значень, на відміну від розглянутої моделі. Це зумовлено використанням алгоритму оптимізації.

Висновки

У статті наведено опис алгоритму локального пошуку, особливості його роботи та подано псевдокод алгоритму.

Реалізовано інформаційну систему Calculate IT версії Local Search, наведено приклад роботи програми та основні функції системи. Надано перелік вимог до програмного забезпечення для коректної роботи системи, приклад вхідних даних та фрагменти коду реалізації алгоритму локального пошуку.

Для дослідження ефективності роботи алгоритму локального пошуку описано задачу оптимізації грошових потоків на прикладі освітньої компанії. Наведено характеристики вхідних даних, необхідних для генерації задачі.

Згенеровано 20 різних індивідуальних задач для обраних параметрів, побудовано план грошових потоків і для найкращої з них було використано алгоритм локального пошуку для оптимізації результатів.

Результати планування грошових потоків, отримані алгоритмом локального пошуку кращі, ніж результати сформовані звичайним моделюванням.

Алгоритмом локального пошуку отримано кращий результат, ніж іншими алгоритмами. До недоліків алгоритму можна віднести те, що час роботи дуже значний.

Список використаних джерел

1. Fuentes A. Solution to travelling salesman problem by clusters and a modified multi-restart iterated local search metaheuristic / A. Fuentes, G. Erick. // PloS one. – 2018. – №13
2. Song T. An iterated local search algorithm for the University Course Timetabling Problem / Song. // Applied Soft Computing. – 2018. – №68.

Андрєєва А.М.

магістрантка спеціальності «Фізика та астрономія»

факультету математики, інформатики та фізики НПУ імені М.П. Драгоманова

Науковий керівник: канд. пед. н., доц. Козеренко С.І.

ВИКОРИСТАННЯ ЗАКОНІВ ФІЗИКИ В СУЧАСНИХ ЕЛЕКТРОННО-ТЕХНІЧНИХ ПРИСТРОЯХ, ЯК ЗАСІБ ПІДВИЩЕННЯ ФАХОВИХ ЗНАНЬ З ФІЗИКИ

Анотація. У статті викладено основні фізичні закони електростатики та електродинаміки під час вивчення фізичних основ функціонування електронно-технічних пристроїв, як головний засіб підвищення рівня фахових знань вчителів з основ сучасної електроніки та фізики. Наведено приклад використання фізичних законів при вивченні розділу «Електродинаміка» в шкільному курсі фізики.

Ключові слова: основи сучасної електроніки, електронно-технічні пристрої, закони електродинаміки та електростатики, технології, методика викладання фізики.

Abstract. The article considers the basic physical laws of electrostatics and electrodynamics in the study of the physical foundations of electronic devices, as the main means of improving the professional knowledge of teachers on the basics of modern electronics and physics. An example of the use of physical laws in the study of "Electrodynamics" in the school course of physics.

Keywords: basics of modern electronics, electronic devices, laws of electrodynamics and electrostatics, technologies, methods of teaching physics.

Актуальність. В умовах науково-технічного прогресу особливо чітко відстежується взаємозв'язок між наукою, технікою та виробництвом. Наука стала безпосередньою виробничою силою, а наукові досягнення та відкриття виявилися в значній мірі залежними від рівня розвитку та можливостей сучасних технологій. На сьогодні, ми бачимо широкий спектр використання електронних приладів та пристроїв, що зумовлено їх швидкодією, точністю, високою чутливістю, малими значеннями споживання енергії та постійно зростаючою економічністю.

Отже, варто відстежити, які фізичні явища та закони зумовлюють принцип роботи сучасних електронно-технічних пристроїв та зазначити яким чином отримані знання впливають на рівень підвищення фахових знань вчителів та студентів з основ сучасної електроніки та фізики загалом.

Мета статті полягає у ознайомленні з науковими розробками в галузі сучасної електроніки; розгляді застосування основних фізичних законів

електродинаміки під час роботи деяких електронно-технічних пристроях, як головних об'єктів електроніки сьогодення та майбутнього.

Виклад основного матеріалу.

Електроніка (англ. electronics) – область фізики, що охоплює дослідження методів підсилення, генерації і перетворення частоти електромагнітних коливань і хвиль (у широкому діапазоні довжин хвиль, що включає радіо- та оптичний діапазони), заснованих на вимушеному випромінюванні або нелінійній взаємодії випромінювання з речовиною [1, С.158].

Провідну роль в електроніці відіграють вимушене і додатній зворотний зв'язок. Датою народження електроніки є 1954, коли був створений Н.Г. Басовим і А.М. Прохоровим (СРСР) і Ч. Таунсом зі співробітниками квантовий генератор на молекулах NH₃. Електроніка виникла в діапазоні радіохвиль (довжина хвилі генератора на молекулах NH₃ $\lambda=1,24$ см), однак подальший її розвиток відбувався в оптичному діапазоні [1, С.158].

Перш ніж аналізувати закони фізики, які використовуються під час роботи принтера, насамперед варто надати означення «електронно-технічним пристроям», зазначити їх види, висвітлити головні спільні та відмінні риси принципу роботи в порівнянні з іншими копіювальними пристроями, а також розглянути механізми функціонування даних пристроїв.

Принтер – це технічний пристрій друку цифрової інформації на твердий носій, зазвичай на папір. Він відноситься до периферійних пристроїв комп'ютера. Принтери мають перетворювач цифрової інформації, що зберігається в запам'ятовуючих пристроях комп'ютера, фотоапарата і цифрової пам'яті, на спеціальну машинну мову [2].

Можна виділити наступні види принтерів за технологією друку:

- лазерні принтери;
- світлодіодні принтери;
- струменеві принтери;
- матричні принтери.

Зупинимося більш детально на характеристиках кожного з цих видів.

Лазерний принтер – вид принтера, що надає можливість виготовлення високоякісних відбитків текстів і графіки, використовуючи при цьому звичайний папір (Рис.1).

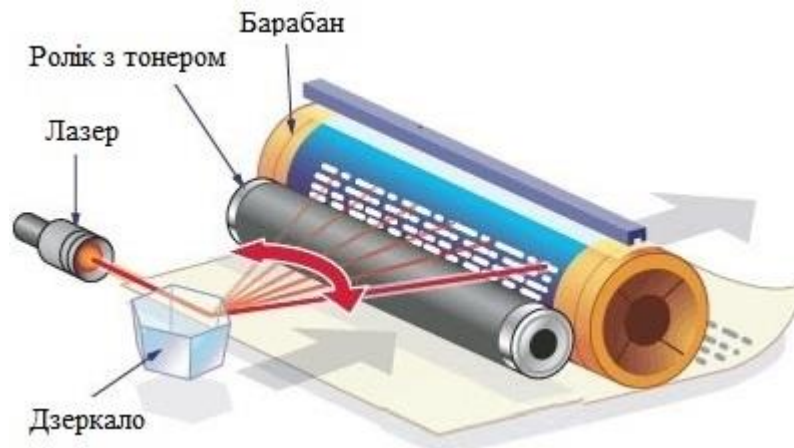


Рис.1. Зовнішній вигляд та будова лазерного принтера

Принцип його роботи полягає в тому, що на поверхні фото-барабана рівномірно розподіляється статичний заряд (протони й електрони мають заряд, однаковий за значенням, але протилежний за знаком; заряд визначається кількістю електронів, що проходять через поперечний переріз провідника за 1 секунду; відповідно, статичний заряд дорівнює кількості нестійких йонів – дефіциту або надлишку електронів) коротроном (коротрон – тонкий дріт, натягнутий на металевий каркас, але від цього каркасу ізольований) або валом заряду (вал заряду – деталь картриджа, яка рівномірно прилягає до поверхні фото-барабана й передає йому статичний заряд). Заряд знімається світлодіодним лазером (світлодіодний лазер – лазер, активним середовищем якого є електронно-дірковий газ, а робочою областю – напівпровідниковий р-п перехід). На поверхню барабана виносяться приховане зображення, потім – тонер. Тонер може притягуватися до поверхні барабана (це залежить від заряду) [5].

Фізичні закони, які виконуються під час роботи лазерного принтера [7]:

➤ закон збереження електричного заряду – повний заряд ізольованої замкнутої фізичної системи є величиною сталою, тобто не змінюється незалежно від процесів, які відбуваються всередині цієї системи;

➤ закон Ома для повного кола (у будь-якому принтері наявне електричне коло) – сила струму в замкнутому електричному колі, яке містить одне джерело струму, дорівнює відношенню електрорушійної сили (ЕРС) джерела струму до повного опору кола;

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

I – величина сили струму,

\mathcal{E} – електрорушійна сила;

R – зовнішній опір провідника;

r – внутрішній опір провідника.

- закон Кулона (при електризації в принтері) – сила взаємодії двох тіл прямопропорційна добутку їх модулів і оберненопропорційна відстані між ними;
- закон Максвелла-Больцмана.

Світлодіодний принтер – вид принтера, що, як і лазерний, слугує для перенесення зображення з цифрового носія на паперовий, однак суттєво від лазерного відрізняється, оскільки, фактично, є його покращеною версією [6, С.5].

Якщо лазерний принцип використовує досить складну систему освітлення – джерело світло (лазер) + система призм і дзеркал, то в світлодіодному принтері джерелом світла слугує світлодіодна лінійка. Робота світлодіодного принтера базується на принципі сухого електростатичного переносу (Рис.2).

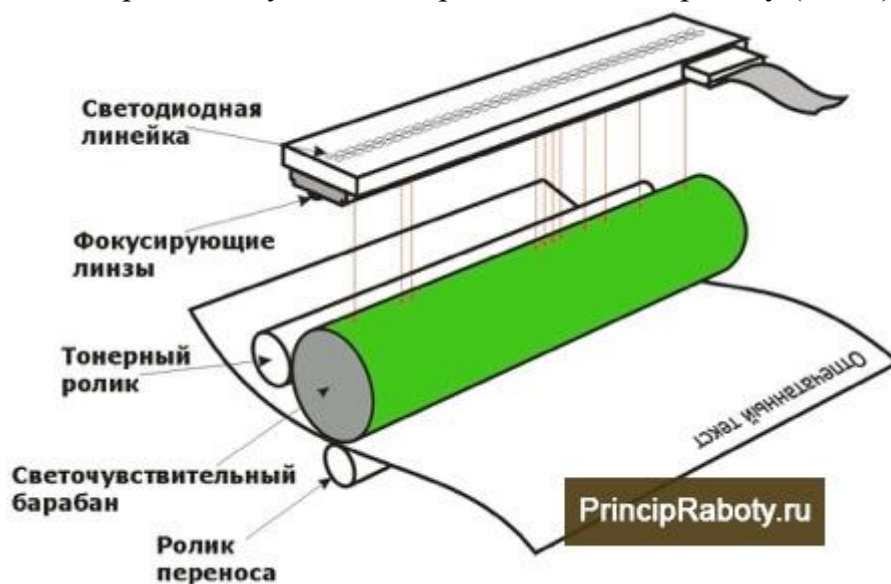


Рис.2. Зовнішній вигляд та будова світлодіодного принтера

Світлодіодна система має як переваги, так і недоліки [3]:

Переваги:

- ❖ компактність;
- ❖ простота й надійність (теоретично);
- ❖ використання додаткових лінз;
- ❖ можливість паралельного подання даних на світлодіод.

Недоліки:

- ❖ ймовірність зниження якості (поява смуг);
- ❖ неможливість зміщення;
- ❖ обмежені можливості фокусування;
- ❖ низька швидкість.

Фізичні закони при роботі світлодіодного принтера[7]:

- ❖ закон збереження електричного заряду – повний заряд ізольованої замкнутої фізичної системи є величиною сталою, тобто не змінюється незалежно від процесів, які відбуваються всередині цієї системи;
- ❖ закон Ома для повного кола (у будь-якому принтері наявне електричне коло) – сила струму в замкнутому електричному колі, яке містить одне джерело струму, дорівнює відношенню електрорушійної сили (ЕРС) джерела струму до повного опору кола;
- ❖ закон Кулона (при електризації в принтері) – сила взаємодії двох тіл прямопропорційна добутку їх модулів і оберненопропорційна відстані між ними;
- ❖ фотометричний закон віддаленості – силу світла можна обчислити за освітленістю за умови, що відстань фотометрування більша за фотометричну межу;
- ❖ закон дисперсії – закон залежності енергії одноелектронного стану від квазі-імпульсу;
- ❖ формула Фауста – для точності в 1 % фотометрування потрібно проводити на відстані, яка в 10 разів перевищуватиме максимальний розмір джерела або приймача випромінювання.

Струменевий принтер – вид принтера, що характеризується низькою швидкістю, але високою якістю нанесення (Рис.3).

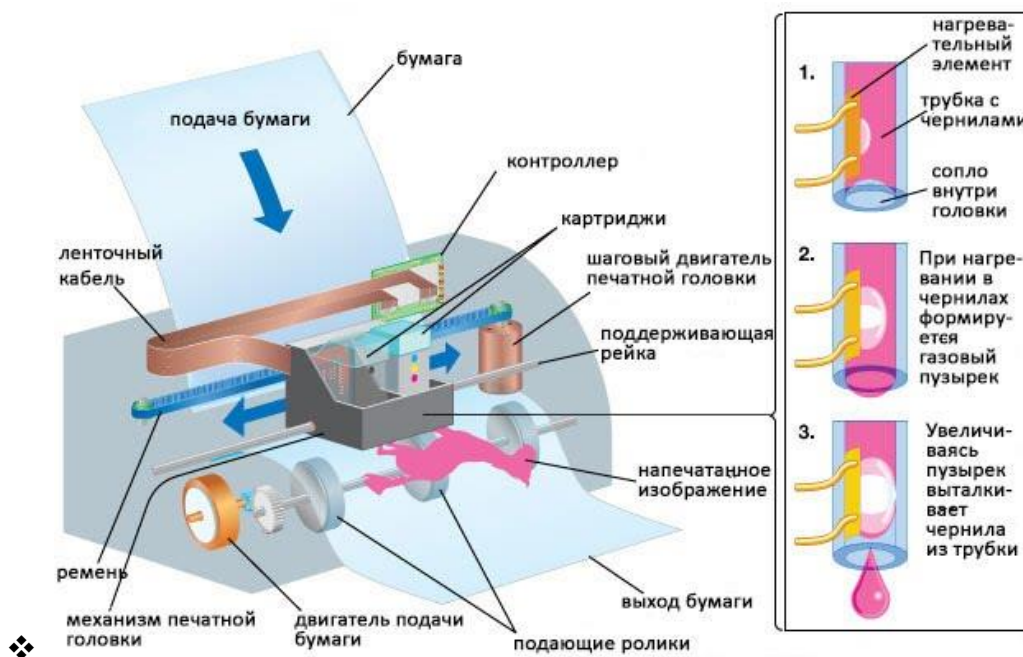


Рис.3. Зовнішній вигляд та будова струменевого принтера

Принцип дії струменевого принтера подібний до матричного. Однак сама технологія така: текст або зображення переноситься на папір за допомогою мікроскопічних чорнильних крапель, що подаються через голівку друкувального

пристрою (в цьому й полягає суттєва відмінність його від матричного принтера). Головка може бути частиною або картриджа, або принтера [5].

Чорнило подається одним із двох способів:

- ❖ за допомогою нагрівального елемента (використання термічних технологій);
- ❖ за допомогою п'єзоелектричної частини.

Друк відбувається за допомогою рідких барвників, що розподіляються не головками з голками (як в матричному принтері), а спеціальною матрицею.

Існує також два типи подачі барвника:

- ❖ безперервна подача;
- ❖ подача за вимогою.

Переваги:

- ❖ висока якість;
- ❖ можливість кольорового друку;
- ❖ адекватна ціна;
- ❖ відсутність шуму.

Фізичні закони при роботі струменевого принтера [7]:

❖ закон збереження електричного заряду – повний заряд ізольованої замкнутої фізичної системи є величиною сталою, тобто не змінюється незалежно від процесів, які відбуваються всередині цієї системи;

❖ закон Ома для повного кола (у будь-якому принтері наявне електричне коло) – сила струму в замкнутому електричному колі, яке містить одне джерело струму, дорівнює відношенню ЕРС джерела струму до повного опору кола;

❖ закон Кулона (при електризації в принтері) – сила взаємодії двох тіл прямопропорційна добутку їх модулів і оберненопропорційна відстані між ними;

❖ закон Джоуля-Ленца (при використанні нагрівального елемента) – потужність тепла, що виділяється в провіднику при проходженні електричного струму крізь нього, прямопропорційна добутку щільності електричного поля на значення його напруженості.

Матричний принтер – вид принтера, що друкує текст або зображення на папері за допомогою друкуючої головки ударним способом. Друкуюча головка складається з набору голок, що приводяться в дію електромагнітами (Рис.4).

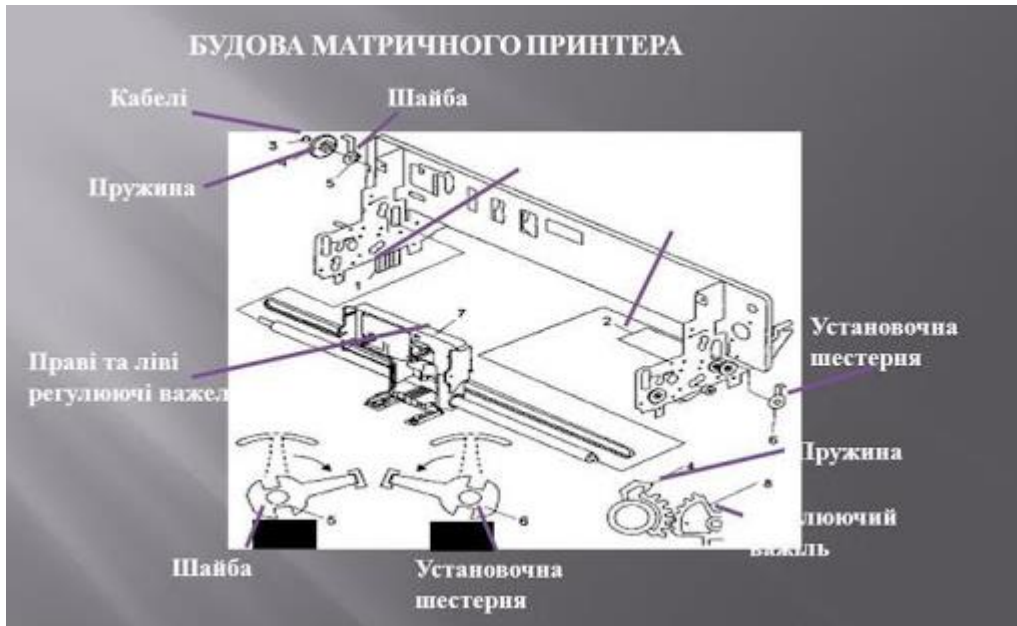


Рис.4. Зовнішній вигляд та будова матричного принтера

Матричний принтер за принципом роботи чимось схожий до друкарської машинки. Головка принтера знаходиться в каретці й наносить відбиток по прямій впоперек аркуша паперу. Для переміщення каретки використовується ремінна або гвинтова передача, зубчаста рейка. Переміщення каретки забезпечується кроковим електродвигуном.

Голки в друкуючій голівці можуть розташовуватися одним або двома вертикальними рядами. Їх виготовляють з вольфрамового сплаву, який є стійким до зношення. Оскільки електромагніти при роботі нагріваються, можливі два варіанти: пасивний відвід тепла за допомогою радіатора, примусове охолодження за допомогою вентилятора.

Види матричних принтерів:

- ❖ швидкісні лінійно-матричні принтери;
- ❖ барабанні принтери;
- ❖ ромашкові або пелюсткові принтери.

Фізичні закони при роботі матричного принтера [7]:

- ❖ закон збереження електричного заряду – повний заряд ізольованої замкнутої фізичної системи є величиною сталою, тобто не змінюється незалежно від процесів, які відбуваються всередині цієї системи;
- ❖ закон Ома для повного кола (у будь-якому принтері наявне електричне коло) – сила струму в замкнутому електричному колі, яке містить одне джерело струму, дорівнює відношенню ЕРС джерела струму до повного опору кола;

- ❖ закон Кулона (при електризації в принтері) – сила взаємодії двох тіл прямопропорційна добутку їх модулів і оберненопропорційна відстані між ними;
- ❖ закон електромагнітної індукції Фарадея – для будь-якого замкнутого контуру індукована електрорушійна сила (ЕРС) дорівнює швидкості зміни магнітного потоку, що проходить через цілий контур, взятого з від'ємним знаком.

Важливими віхами розвитку сучасної фізичної картини світу є теорія відносності (спеціальна і загальна) і квантова теорія [8].

Застосування квантової теорії дозволяє зрозуміти будову і властивості кристалів, молекул, атомів, атомних ядер, взаємоперетворень елементарних часток.

Фізика досліджує будову матерії і прості форми її руху і взаємодії. Це визначає її провідну роль в системі природничих наук. На стику фізики та інших природничих наук виникли нові наукові дисципліни: хімічна фізика, астрофізика, біофізика, агрофізика та інші.

Фізика є науковою основою технічного прогресу. Цей факт достатньо чітко прослідковується із розвитком техніки і технологій в попередні століття: теплових двигунів, електротехнічних і радіотехнічних пристроїв (телеграф, електричні освітлювачі, електродвигун, електрогенератор, телефон, радіо) [8].

У ХХ столітті завдяки розвитку квантової теорії, виникненню атомної фізики і фізики твердого тіла, швидкий розвиток отримала електроніка (електронна лампа, електронно-променева трубка, транзистор, телебачення, ЕОМ).

Розвиток техніки створює умови для інтенсифікації фізичних досліджень, робить можливою постановку і експериментальне вивчення принципово нових фізичних проблем.

Згідно з новою навчальною програмою [9], тема «Електродинаміка» повністю вивчається в 11 класі (на відмінну від попередніх навчальних програм) і складається з наступних розділів: «Електричне поле», «Електричний струм», «Електромагнітне поле», «Електромагнітні коливання та хвилі». Змістове наповнення розділів практично традиційне, за винятком того, що змінний струм вивчається у розділі «Електромагнітне поле» і учні ознайомлюються з вимушеними електромагнітними коливаннями раніше ніж з вільними, які вивчаються у наступному розділі «Електромагнітні коливання та хвилі»

Електричні властивості речовини, що вивчаються у 10 класі: електропровідність, діелектричні властивості та електроємність.

Властивості електростатичного поля вивчаються в 10 класі: електричний заряд, безмежність, взаємна проникність, силова дія, індикатор (пробний заряд), наявність енергії, взаємодія з речовиною, графічне зображення.

Результати.

На конкретному прикладі подамо вивчення теми «Електромагнітна індукція. Закон електромагнітної індукції» під час організації занять з фізики (дистанційна форма навчання).

Тема: *Електромагнітна індукція. Закон електромагнітної індукції.*

Мета:

Освітня. Ввести поняття явища електромагнітної індукції та індукційного струму; ознайомити з поняттям магнітного потоку та законом електромагнітної індукції.

Розвиваюча. Розвивати логічне мислення, вміння виявляти причинно-наслідкові зв'язки між явищами дійсності.

Виховна. Виховувати уважність, зібраність, спостережливість.

Тип уроку. Урок засвоєння нових знань.

Вивчення нового матеріалу.

Найбільш затребуваним видом енергії в суспільстві є електроенергія.

Простота у виробництві, простота у транспортуванні, простота у розподілі між споживачами, простота у перетворенні в інші види енергії, екологічно чистий вид енергії [4].

Потік магнітної індукції.

Електромагнітна індукція – це явище виникнення електричного струму в замкнутому провіднику, який знаходиться в змінному магнітному полі.

Електричний струм, який виникає в замкнутому провіднику в змінному магнітному полі, називають індукційним (Рис.5) [4].

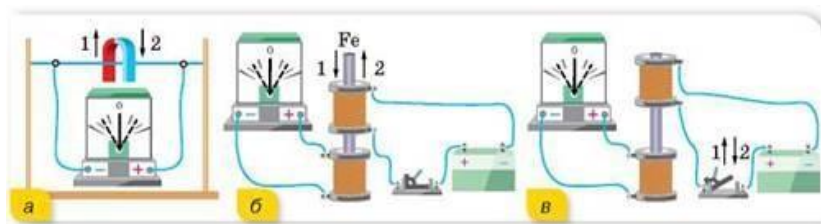


Рис.5. Досліди з виявлення явища електромагнітної індукції

Щоб дати точне кількісне пояснення явища електромагнітної індукції, вводять величину - потік магнітної індукції.

Потік магнітної індукції Φ – це фізична величина, яка характеризує магнітне поле, що пронизує певну поверхню площею S . Якщо індукція B в усіх точках поверхні однакова, то

$$\Phi = B * S * \cos\alpha,$$

де α - кут між вектором магнітної індукції та нормаллю до поверхні (Рис.6) [4].

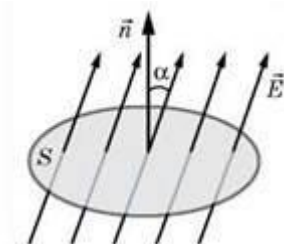


Рис.6. Зображення напрямку вектора магнітного потоку

Одиниця магнітного потоку 1 Вебер: $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2$

Електромагнітна індукція – явище виникнення в замкненому провіднику електричного струму внаслідок зміни магнітного потоку, що пронизує контур провідника [4].

Напрямок індукційного струму. Правило Ленца

Майкл Фарадей, аналізуючи проведені досліди, встановив, що напрямок індукційного струму в провіднику залежить від того, збільшується чи зменшується магнітний потік через його контур. Загальне правило, за допомогою якого можна визначити напрямок індукційного струму в замкненому провіднику (Рис.7), сформулював у 1833 р. російський фізик Емілій Християнович Ленц (1804 –1865) [4].

Індукційний струм у замкненому провіднику завжди має такий напрямок, що створюваний цим струмом власний магнітний потік протидіє тим змінам зовнішнього магнітного потоку, які збуджують індукційний струм (Рис.8) (Правило Ленца впливає із закону збереження енергії.) [4].

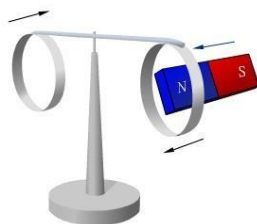


Рис.7. Визначення напрямку індукційного струму в замкненому провіднику.

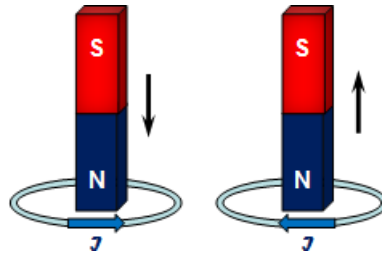


Рис.8. Правило Ленца

Закон електромагнітної індукції.

Закон електромагнітної індукції (закон М. Фарадея):

ЕРС індукції в замкнутому контурі дорівнює за модулем швидкості зміни магнітного потоку, що пронизує контур

$$\varepsilon_i = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right|$$

Якщо ЕРС індукції спостерігається в котушці з N витків, то її величина буде відповідно в N разів більшою, ніж для одного витка, тобто:

$$\varepsilon_i = N \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right|$$

ЕРС індукції вимірюється у вольтах. Тоді одиницю магнітного потоку в СІ - вебер - можна записати так: $1 \text{ Вб} = 1 \text{ В} \cdot \text{с}$

Висновки: в ході опрацювання літературних джерел з теоретичної фізики було розглянуто принцип роботи різноманітних принтерів, таких як матричний, світлодіодний, струменевий та лазерний.

Вказані основні переваги та недоліки у використанні, проаналізовані фізичні закони, які лежать в основі принципу роботи. Наведена, методична розробка уроку з фізики для 11-го класу (рівень стандарт) з теми «Електромагнітна індукція. Закон електромагнітної індукції.».

Список використаної літератури

8. Вакуленко М.О., Вакуленко О.В. Фізичний тлумачний словник. - Київ: ВПЦ „Київський університет“, 2008. - 771 с.

9. Дмитрієва Л.Б., Швець Є.Я., Дмитрієв В.С. Оптоелектроніка. Методичні вказівки до лабораторних робіт для студентів ЗДІА, що навчаються за напрямками «Мікро- та наноелектроніка» денної та заочної форм навчання.

10. Дяченко Р. Дослідження компенсаторів дисперсії за допомогою волоконних світловодів з від'ємною дисперсією. Київ: КПІ, 2016. - 83 с.

11. Конспект уроку на тему: «Електромагнітна індукція».[Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://naurok.com.ua/urok-elektromagnitna-indukciya-zakon-elektromagnitno-indukci-39193.html>
12. Лебедь О.О., Кочергіна О.Д., Гаращенко В.І., Мислінчук О.О. Методичні вказівки до виконання практичних робіт із навчальної дисципліни «Фізичні основи інформаційних систем» (спецкурс) для студентів напрямів підготовки 6.080200 «Прикладна математика» та 6.080101 «Геодезія, картографія та землеустрій» денної форми навчання. Рівне: НУВГП, 2013. - 42 с.
13. Литвиненко А.С. Методичні вказівки для виконання лабораторних робіт з дисципліни «Фізика і техніка світлодіодів» (для студентів 5 курсу денної і 6 курсу заочної форм навчання спеціальності 141 – Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка. Світлотехніка і джерела світла) / Харків нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О.М. Бекетова. Харків: ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2017. - 34 с.
14. Технічна електродинаміка. Науково-прикладний журнал. [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://www.techned.org.ua/index.php/techned>
15. Сайт викладача фізики Карбівничого А.М. [Електронний ресурс] – Режим доступу: <http://fizika.dp.ua/>
16. Навчальні програми “Фізика. 10-11 класи. Рівень стандарту. Профільний рівень” (авторський колектив під керівництвом Локтєва В.М.) затверджені наказом МОН України від 24.11.2017 №1539 “Про надання грифу МОН навчальним програмам з фізики і астрономії для учнів 10-11 класів та польської мови для учнів 5-9 та 10-11 класів закладів загальної середньої освіти” [Електронний ресурс] – Режим доступу: <https://cutt.ly/SYk9tQ4>

Донець В.Р.

магістрантка спеціальності «Середня освіта (Математика)»

факультету математики, інформатики та фізики НПУ імені М.П.Драгоманова

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент **Гончаренко Я.В.**

ІНТЕГРОВАНІ УРОКИ З МАТЕМАТИКА ТА ІНФОРМАТИКИ: РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ В СЕРЕДОВИЩІ ПРОГРАМУВАННЯ SCRATCH

Анотація. В статті запропоновано методичні вказівки та задачі міжпредметного змісту для реалізації інтегрованого підходу до навчання математики та інформатики з використанням програмного середовища Scratch.

Ключові слова: інтегроване навчання, навчання математики, програмування в Scratch.

Abstract. The article proposes methodical instructions and tasks of interdisciplinary content for the implementation of an integrated approach to teaching mathematics and informatics using the Scratch software environment.

Keywords: integrated learning, teaching mathematics, programming in Scratch.

Інтеграція – засіб отримання нових уявлень на основі традиційних предметних знань. Вона спрямована на розвиток ерудиції учнів, на оновлення існуючої вузької спеціалізації у навчанні. Але інтеграція не повинна замінити навчання традиційних предметів, вона повинна з'єднати одержувані знання в єдину систему [1].

Інтегрований урок з математики та інформатики – це спеціально організований урок, основною метою якого є поєднання знань, теорій, методів, підходів математики та інформатики для вирішення задач на основі цілісного підходу.

Найбільш ефективним засобом навчання на інтегрованому уроці математики та інформатики є, на мою думку, алгоритмічні задачі, як суто математичні, так і прикладні. Розв'язання таких задач відбувається за наступними етапами:

- ✓ Побудова математичної моделі;
- ✓ Пошук алгоритму розв'язання;
- ✓ Формалізація алгоритму (за допомогою формули, схеми тощо);
- ✓ Реалізація алгоритму в програмному середовищі;
- ✓ Тестування програми;

- ✓ Аналіз отриманих результатів;
- ✓ Можливо розширення кола задач, які можна розв'язати за допомогою створеної програми.

Для розробки інтегрованих завдань ми обрали програмне середовище Scratch, оскільки це візуальне подійно-орієнтоване середовище, розроблене спеціально для дітей та підлітків з метою ознайомлення їх з основами програмування. Також важливо те, що з середовищем Scratch учні знайомляться на уроках інформатики в 5-6 класах.

Тому в цій статті зосередимо увагу інтегрованих задачах, алгоритм розв'язання яких будемо реалізувати в Scratch.

Задача № 1.

Учню дали домашнє завдання з фізики та математики. На виконання кожного предмету учень витрачає 45 та 35 хв відповідно.

→ *Обчислити скільки часу витрачає учень на виконання всієї домашньої роботи(в секундах.)*

→ *Інтерпретувати задачу в середовищі Scratch(для написання програми час буде різним, щоб перевірити коректність роботи програми).*

Перший спосіб:

1) $35 + 45 = 80$ (хв) - на виконання всієї домашньої роботи в хвилинах.

2) $80 * 60 = 4800$ (хв) - час виконання домашньої роботи в секундах.

Відповідна програма для способу 1



Рис. 1.

Другий спосіб

- 1) $35 * 60 = 2100$ (с) - час виконання математики.
- 2) $45 * 60 = 2700$ (с) - час на виконання фізики
- 3) $2100 + 2700 = 4800$ (с) - загальний час виконання домашньої роботи.

Відповідна програма для способу 2

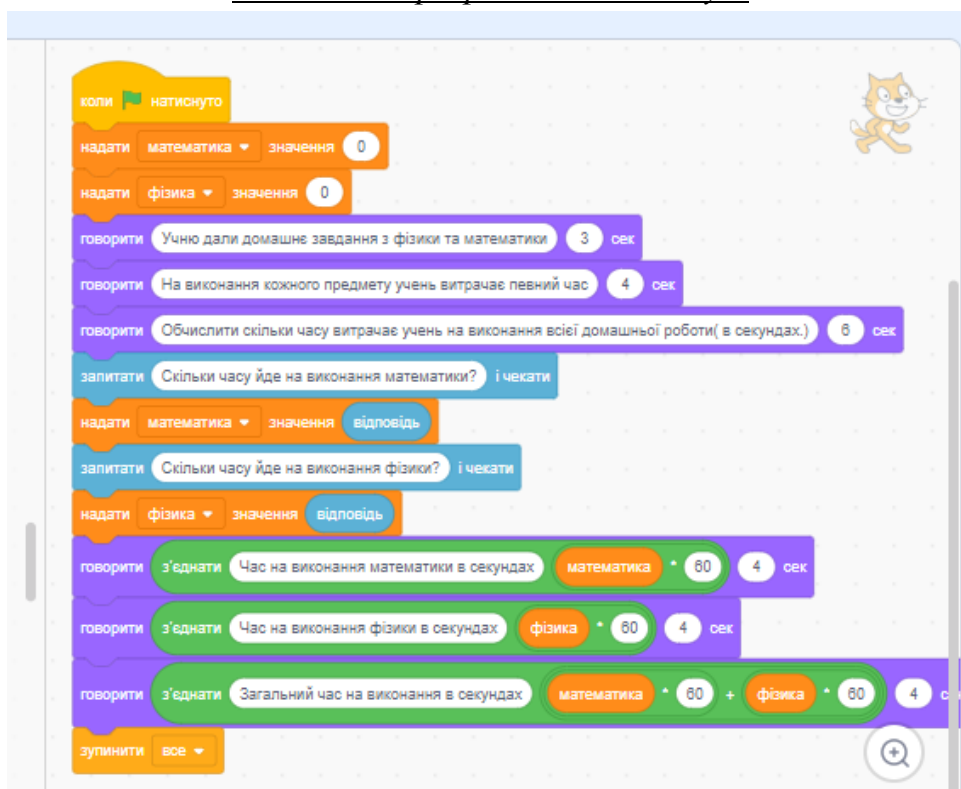


Рис. 2.

Задача № 2.

Іванко давно мріяв про планшет. Батьки сказали, що за кожну отриману оцінку вище 9 він отримує по 5 грн. Орієнтовна ціна планшета 3000 грн.

- 1) *Обчислити кількість оцінок, які треба отримати Іванку, щоб самостійно зібрати собі на планшет.*
- 2) *Обчислити за який найменший час Іванко збере на планшет, якщо максимум в день він може отримати 6 оцінок вище 9.*
- 3) *Обчислити за який час Іванко матиме потрібну йому суму, якщо максимум він в день може отримати 3 оцінки вище 9.*

- 1) $3000 \div 5 = 600$ оцінок треба зібрати Іванку.

2) $600 \div 6 = 100$ днів, найменший час за який Іванко збере на планшет, за умови отримання в день 6 оцінок вище 9.

3) $600 \div 3 = 200$ днів, час за який Іванко матиме потрібну йому суму, за умови отримання трьох оцінок вище 9.

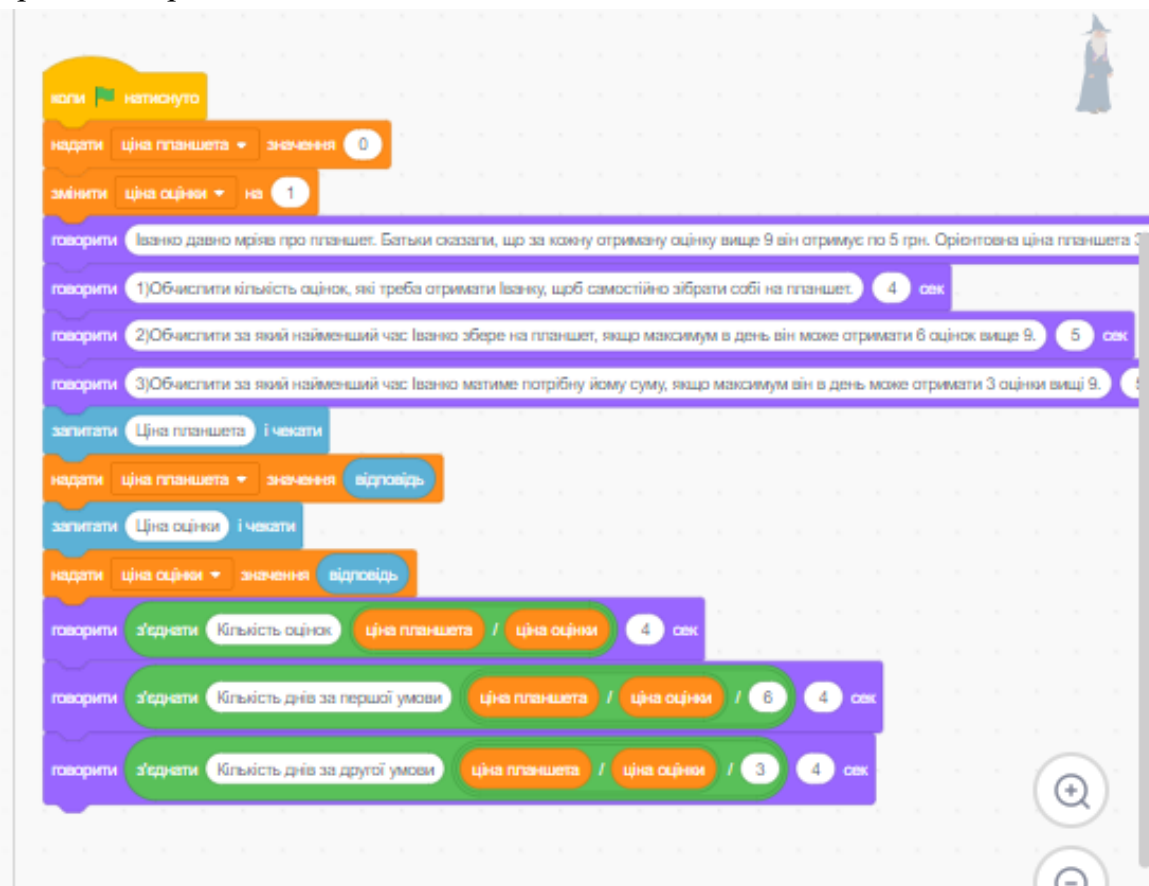


Рис. 3. Програмна реалізація задачі 2.

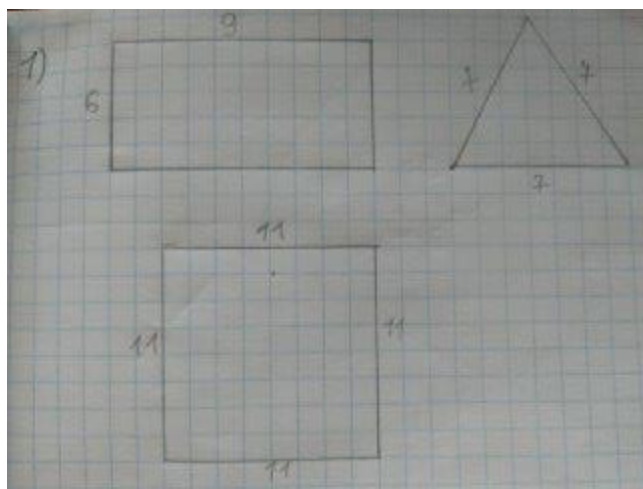


Рис. 4.

Задача № 3.

Дано многокутники (рис. 25).

Обчислити периметр кожного многокутника.

Розв'язання.

1) Знайдемо спочатку периметр прямокутника (вид фігури діти визначають по малюнку та даним і обирають

правильну формулу для обчислення). Такі задачі можна дітям пропонувати вже в 5 класі після вивчення теми периметра та площі деяких фігур. Суть задачі полягає не так в обчисленні, як в просторовій уяві учнів (вони це продемонструють пишучи відповідну програму в середовищі **Scratch**).

Програма яка спочатку будує прямокутник, а потім обчислює периметр виглядає наступним чином (рис. 5).

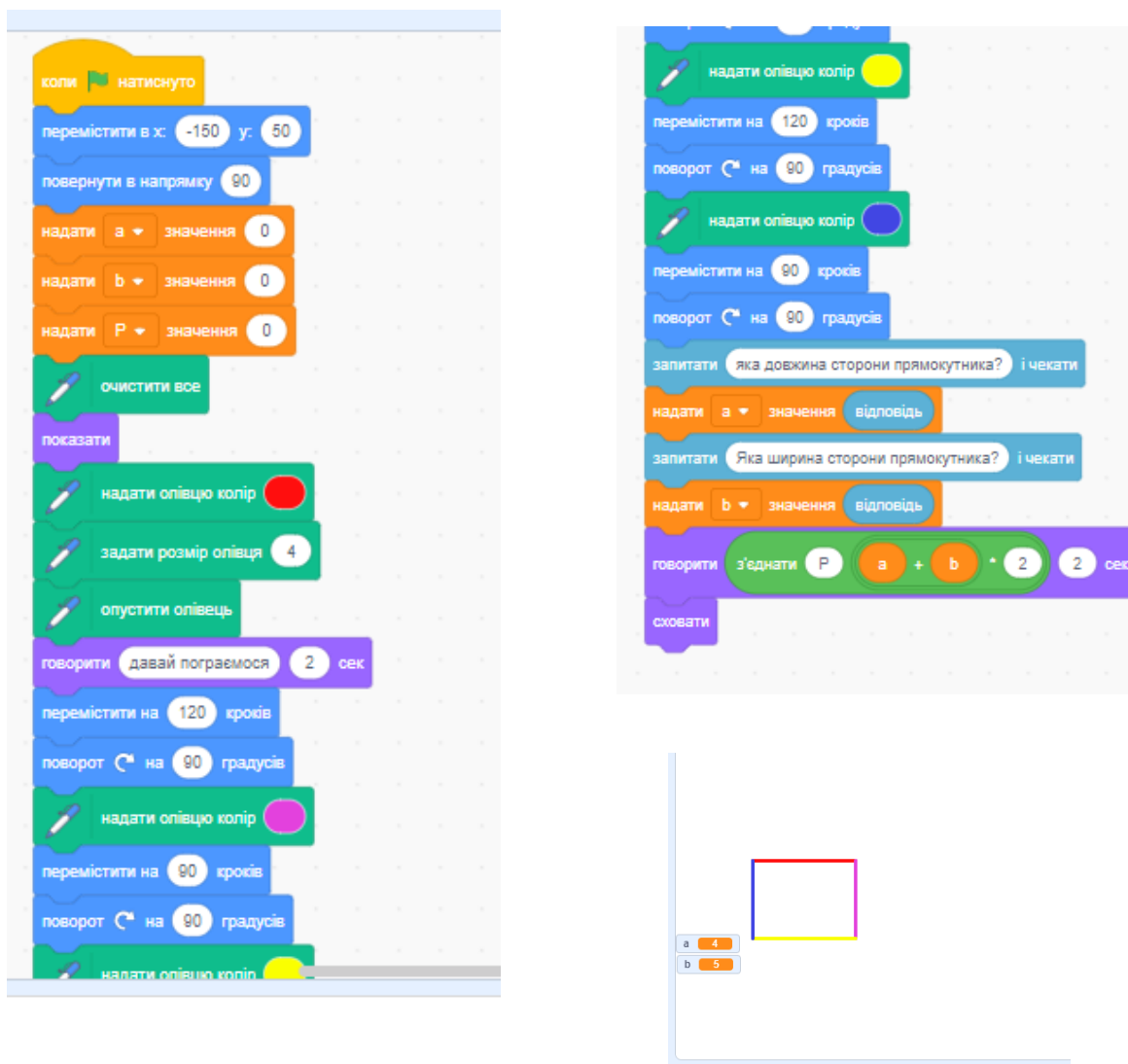


Рис. 5.

Програма може бути досить громіздкою, якщо зосереджуватися на деталях, таких як колір фігури, товщину фігури та час чекання.

Далі аналогічно для двох наступних фігур. Для правильного трикутника формула периметра виглядає $P=3*a$, де a в нашому випадку 6 см (рис. 6).

$$P = 3 * 6 = 18 \text{ см.}$$

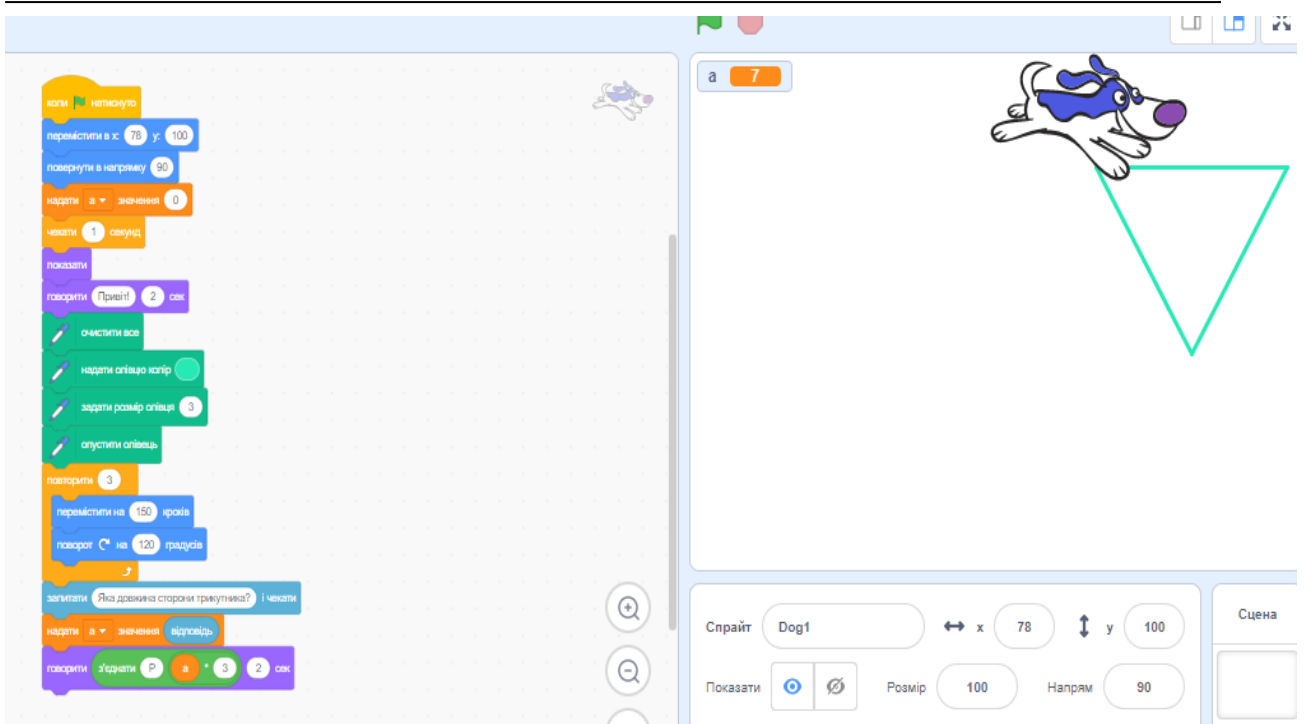


Рис. 6.

Перейдемо до останньої фігури. З малюнка чітко бачимо, що перед нами квадрат, доцільно перед цим завданням в учнів опитати означення квадрату, прямокутника та різні означення трикутників (залежно від сторін і кутів). $P=4*a$, де $a = 11$, $P = 4*11 = 44$ см.

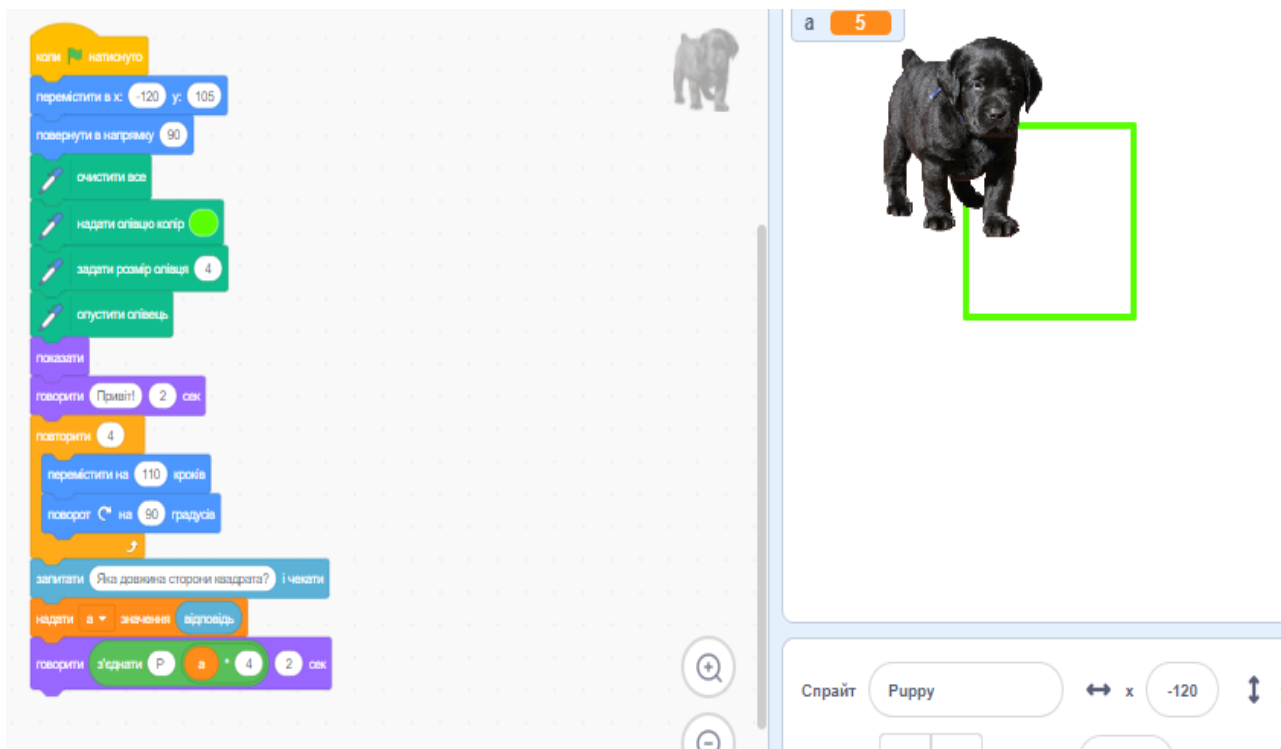


Рис. 7.

Дані програми створюються як загальний алгоритм, що сприяє усвідомленню учня зв'язку між математикою і програмуванням та розумінню можливостей узагальнення отриманих розв'язків.

Задача № 4.

Дано квадрат зі стороною 8 см. Зобразити дану фігуру, знайти її периметр і площу.

Зобразивши фігуру про яку йдеться в задачі переходимо до обчислення вимірів які просять в умові.

$P=4*a$; $S=a*a$, де a лінійний вимір квадрату (його сторона).

$P=4*8=32$ $S=8*8=64$.

Програму знову писатимемо для загального алгоритму.

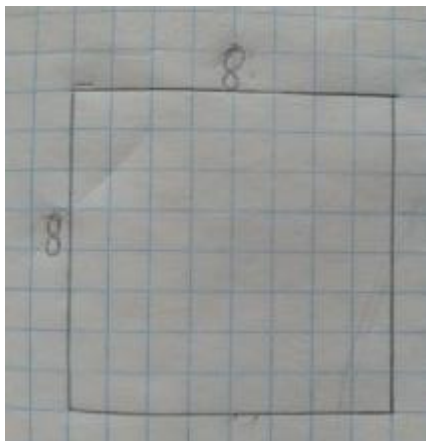


Рис. 8.

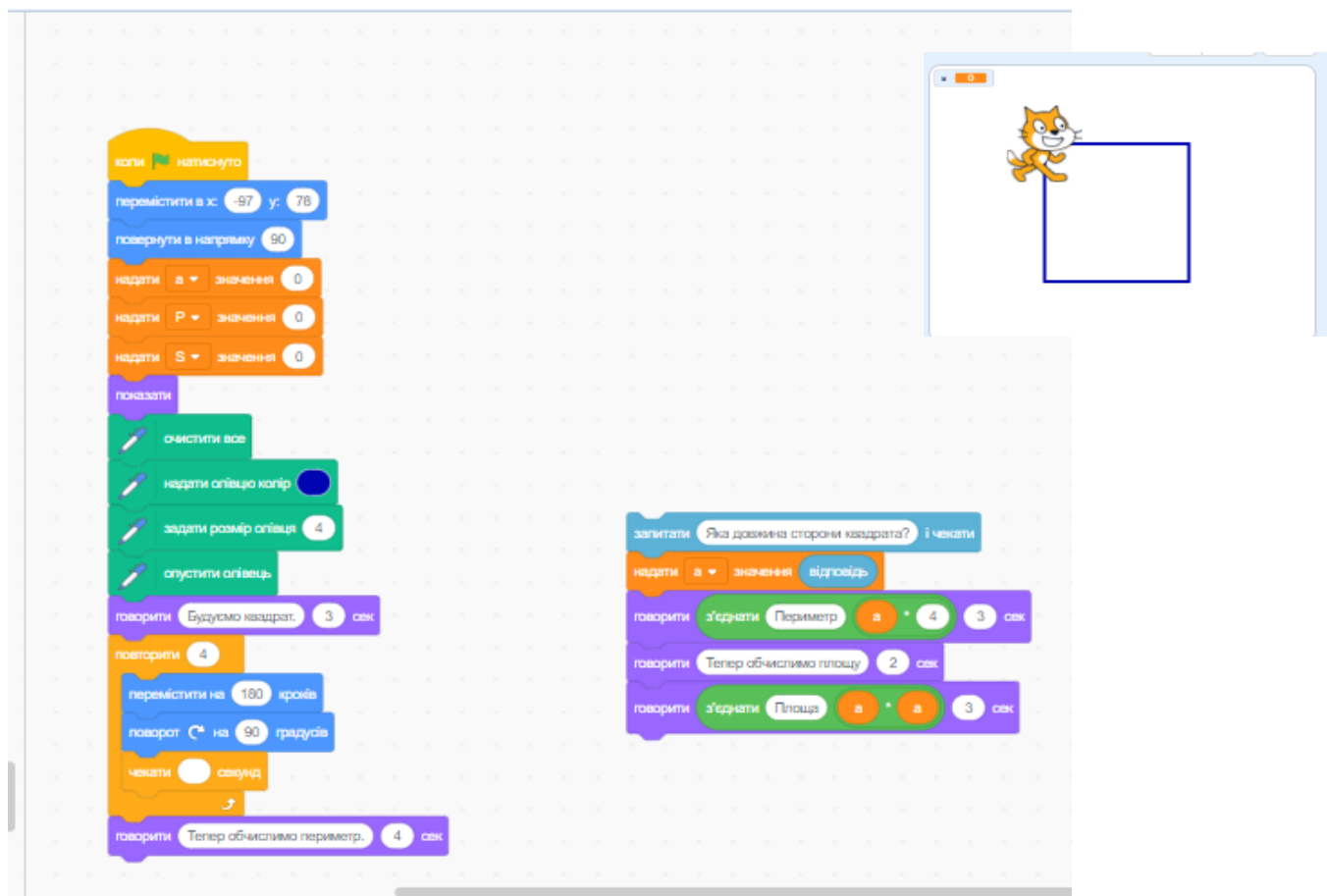
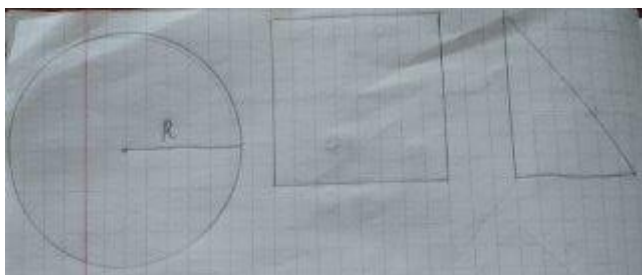


Рис. 9.

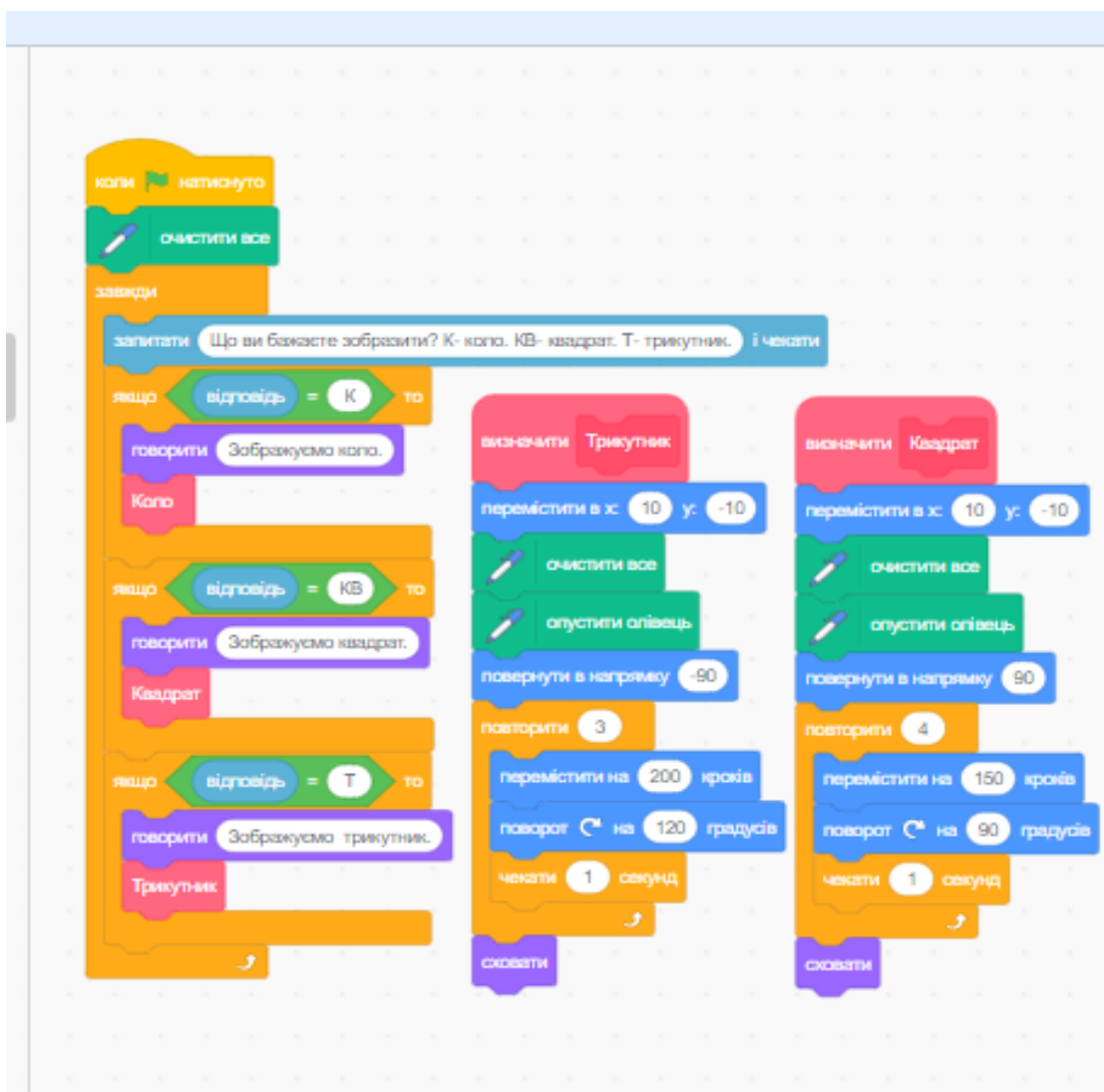
Задача № 5.



За допомогою циркуля та лінійки побудувати: коло, квадрат, трикутник. (з довільними вимірами). Обчислити довжину кола. Радіус в формулі довжини буде той, який обрав кожен з учнів індивідуально, тому в кожного буде різна відповідь. Основна ціль написати

програму яка будуватиме дані фігури (рис. 10,11).

Особливо потрібно звернути увагу учнів на алгоритм побудови кола (рис. 10).



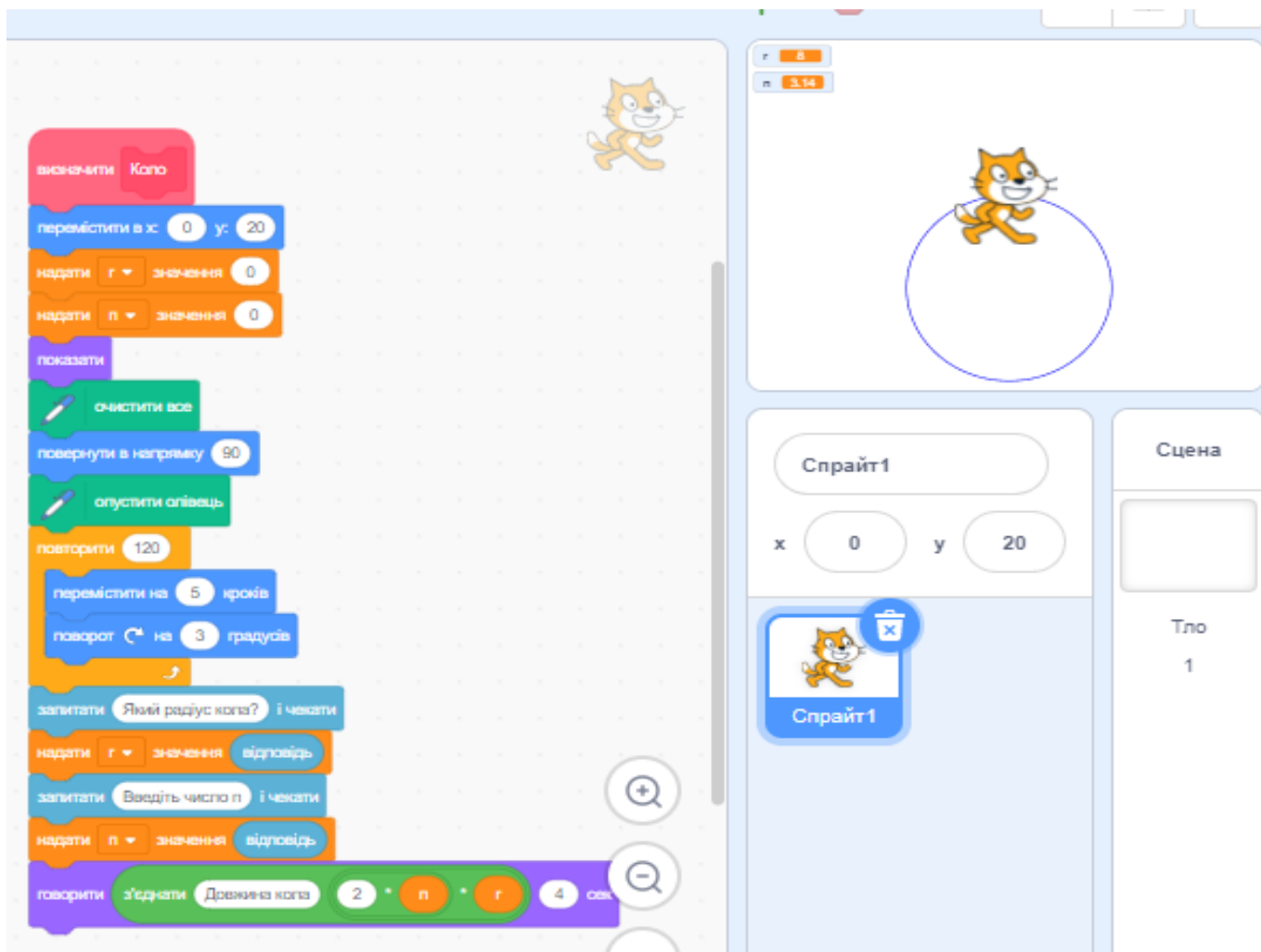


Рис. 11.

Опрацювавши наукову та методичну літературу, проаналізувавши переваги та недоліки STEM-технологій та досвід їх впровадження, я дійшла до висновків:

- зміни в освіті сьогодення потрібні і більше того, якщо, ми, працівники педагогічного напрямку зацікавлені у динамічному та всебічному розвитку нашої країни, впроваджувати STEM-технології потрібно.
- переваги STEM-освіти кардинально змінюють світогляд і сприйняття реальності школярів нашого століття.
- проектна діяльність - це шлях до творчої діяльності особистості, до її пізнання себе, як невід'ємної частинки всесвіту.

Також хочу сказати, що не дивлячись на те, що впровадження STEM-освіти зараз вже на досить високому рівні, все таки, зараз ще виникають проблеми з фундаментальним розвитком цієї освіти. Все це відбувається через недосконале забезпечення всіма необхідними компонентами, для ефективної

співпраці учнів як однієї команди, що йде до розвитку і вдосконалення можливостей своєї країни.

В даній роботі були отримані наступні результати:

- ✓ проаналізовано стан впровадження STEM-технологій навчання математики в Україні, досліджено основні напрямки та методи використання STEM-технологій навчання математики;
- ✓ розроблено методичні вказівки та задачі міжпредметного змісту для реалізації інтегрованого підходу до навчання математики та інформатики з використанням програмного середовища Scratch.

Список використаних джерел

1. Інтеграція у викладанні предметів інформатики та природничо-математичного циклу важлива умова реалізації НУШ [Електронний ресурс]. – Режим доступу: – <https://vseosvita.ua/library/integracia-u-vikladanni-predmetiv-informatiki-ta-prirodnico-matematicnogo-ciklu-vazлива-umova-realizacii-nus-108292.html>
2. Новая украинская школа: полсотни школ Киевской области переводят в будущее [Електронний ресурс]. – Режим доступу: – http://utiputi.com.ua/view_articles.php?id=4812
3. Про затвердження плану заходів щодо реалізації Концепції розвитку природничо-математичної освіти. Розпорядження Кабінету міністрів України від 13.01.2021 // www.kmu.gov.ua/npas/pro-zatverdzhennya-planu-zahodiv-sh-a131r?fbclid=IwAR0wAdPwkgIGHfqBvwQphNLBys7zn8hvAfHLgXh6g-kZIynYXJuw TIuUc1w
4. Концепція розвитку природничо-математичної освіти (STEM-освіти) <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/960-2020-%D1%80#Text>

Куца Д. В.

студентка спеціальності «Середня освіта (фізика)»

факультету математики, інформатики та фізики НПУ імені М.П. Драгоманова

Наукові керівники: кандидат фіз.-мат. наук, проф. Горбачук І.Т.,

завідувач лабораторії Пудченко С.А.

МОДЕРНІЗАЦІЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ ЗА ДОПОМОГОЮ АНАЛОГО-ЦИФРОВИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ

Анотація. Модернізація лабораторних робіт, для поглиблення теоретичних знань і практичних навичок студентів при дослідженні квазістаціонарних електричних систем. Навчити студентів користуватись датчиками АЦП та опрацьовувати результати вимірювання в Excel-сумісному програмному забезпеченні.

Ключові слова: аналого-цифровий перетворювач, лабораторна робота з фізики, коло змінного струму.

Abstract. Modernization of laboratory work to deepen the theoretical knowledge and practical skills of students in the study of quasi-stationary electrical systems. Teach students to use ADC sensors and process measurement results in Excel-compatible software.

Key words: Analog-to-digital converter, laboratory work in physics, AC circuit.

Лабораторна робота є однією з основних форм вивчення фізики. При вивченні курсу загальної фізики у Національному педагогічному університеті імені М.П. Драгоманова (НПУ) здебільше використовують лабораторні роботи з навчального посібника «Лабораторний фізичний практикум», який входить до складу комплексу навчальних посібників з курсу загальної фізики, призначений для студентів фізико-математичних спеціальностей педінститутів, написаний професором В.П. Дущенком у співавторстві з колективом викладачів. У цьому посібнику лабораторні роботи охоплюють всі розділи курсу загальної фізики, містять короткі теоретичні відомості, опис установки та окремих приладів, практичні завдання, питання для самоконтролю. Виконання студентами лабораторних робіт сприяє умінню встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, функціональні залежності між процесами та явищами. У лабораторних роботах з дослідження квазістаціонарних електричних систем використовують джерела ЕРС зі змінним струмом (технічний змінний струм), який періодично змінюється за значенням і напрямом за синусоїдним законом та ЕРС з постійним струмом. Запропоновані прилади для вимірювання фізичних величин при виконанні лабораторної роботи «Визначення активного опору, індуктивності і ємності у колі змінного струму», амперметр типу АСТ або Э523 та вольтметр типу АСТ або Э515, градуйовані на ефективне (діюче) значення сили струму I_{ef} і напруги

$U_{\text{еф}}$, яке є меншим від амплітудного (максимального) I_m та U_m в $\sqrt{2}$ разів і пов'язані такими співвідношеннями: $I_{\text{еф}}=I_m/\sqrt{2}$, $U_{\text{еф}}=U_m/\sqrt{2}$. Щоб отримати миттєві значення змінної сили струму і напруги користуються осцилографом [3]. Використання цих приладів у наш час не зовсім є зручним і наочним способом зображення змінної сили струму та напруги, які змінюються за гармонічним законом. Тому актуальним є модернізація лабораторної роботи «Визначення активного опору, індуктивності і ємності у колі змінного струму», при виконанні цієї роботи пропонуємо додати використання АЦП з відповідними датчиками, що дає можливість проводити вимірювання фізичних величин, запис результатів вимірювання, відображати результати у вигляді цифрових таблиць, графіків на екрані комп'ютера або на проекційному екрані, а також експорт даних вимірювання в Excel-сумісний формат, синхронний запис даних вимірювань та відео зображень ходу експерименту, одночасне вимірювання декількох фізичних величин, активізація процесу вимірювань за амплітудою вимірюваного сигналу, або за імпульсом зовнішньої синхронізації, створення мультимедійного проекту експерименту (в складі текстового файлу опису, відеоролика з поясненнями сутності експерименту, групи файлів з даними ходу експерименту) з подальшим відтворенням на будь-якому комп'ютері [2]. В лабораторії «Спеціального фізичного практикум для магістрів» кафедри методології та методики навчання фізико-математичних дисциплін вищої школи використовують АЦП двох видів: «Vernier» (виробник США) та «ITM-lab» (виробник Україна м. Харків), з наборами датчиків. При модернізації вищезазначеної лабораторної роботи були використані АЦП двох видів.

У лабораторній роботі згідно протоколу визначають опір, індуктивність і ємність використовуючи покази приладів у колі з постійним і змінним струмом. Складаємо електричне коло за схемою наведену у посібнику (рис. 1.) [1].

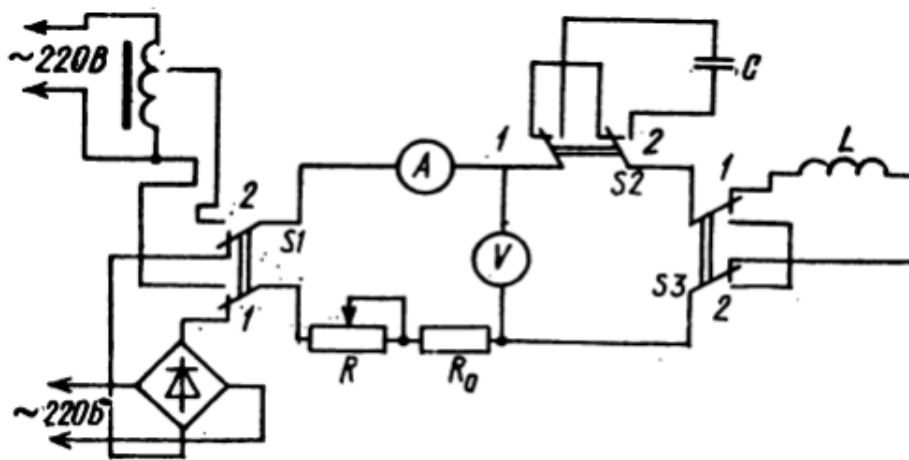


Рис. 1. Схема електричного кола установки.

Розглянемо визначення індуктивності, склавши електричне коло за схемою, у якості ЕРС змінного струму використаємо генератор, який налаштуємо на частоту 50 Гц, а амплітудне значення від 2 В до 12 В, використовуємо датчики АЦП (амперметр 100 мА, вольтметр 12 В), у налаштуваннях вимірювання датчиків встановлюємо частоту вимірювання 200 мкс. Вмикаємо електричне коло на 1-2 секунди і припиняємо вимірювання. На екрані комп'ютера спостерігаємо результати вимірювання, два графіки залежності сили струму від часу та залежності напруги від часу, дві синусоїди, які мають зсув фаз між струмом і напругою $\pi/2$, це фізично пояснюється тим, що, якщо омичного опору немає, прикладена напруга дорівнює ЕРС самоіндукції з протилежним знаком (рис. 2.).

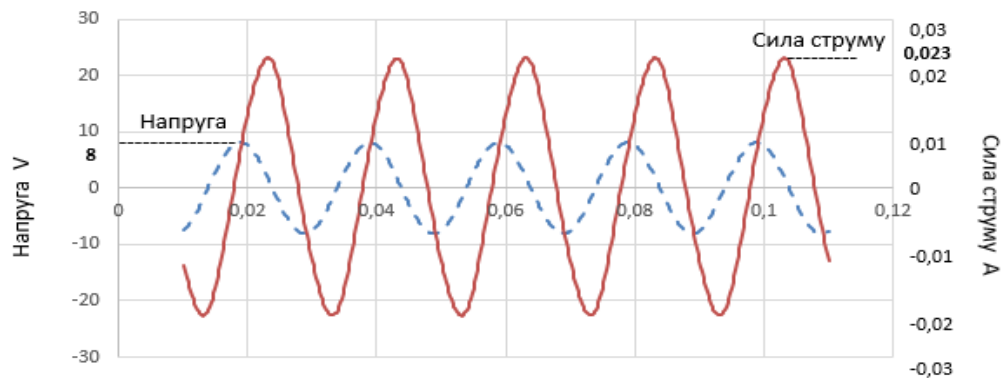


Рис. 2. Результати вимірювання індуктивності у колі змінного струму.

Згідно з протоколом роботи, індуктивність визначаємо за формулою:

$$L = \frac{\sqrt{R_{\text{еф}}^2 - R^2}}{\omega}$$
, де значенню ефективного опору, дорівнює відношення ефективної напруги до ефективної сили струму: $R_{\text{еф}} = \frac{U_{\text{еф}}}{I_{\text{еф}}}$. За результатами вимірювання визначаємо I_m і U_m , та розраховуємо значення сили струму $I_{\text{еф}}$ і напруги $U_{\text{еф}}$, згідно формул протоколу лабораторної роботи [1].

$$R_{\text{еф}} = \frac{3,12}{0,0943} \approx 330,85 \text{ Ом}$$

Для нашої котушки $R=2,6 \text{ Ом}$.

$$\text{Тоді } L = \frac{\sqrt{330,8^2 - 2,6^2}}{2 \cdot 3,14 \cdot 50} \approx 2,1 \text{ Гн.}$$

Аналогічно проводимо вимірювання для визначення ємності конденсатора, збираємо електричне коло з конденсатором, вмикаємо на 1-2 секунди. Результати вимірювання фізичних величин зберігаємо, розрахунки виконуємо згідно формули з протоколу лабораторної роботи:

$$C = \frac{1}{\omega \sqrt{R_{\text{еф}}^2 - R^2}}.$$

Вважаємо, що $R=0$. Тоді $C = \frac{1}{\omega R_{\text{еф}}} [1]$.

За допомогою спеціальної програми ITM lab, отримані значення фізичних величин, які можна представити у вигляді таблиць Excel, побудуємо графік залежності напруги і сили струму від часу у колі змінного струму (рис. 3). З графіка видно, що максимум сили струму $I_m = 28,4$ мА, максимальна напруга $U_m = 6,3$ В.

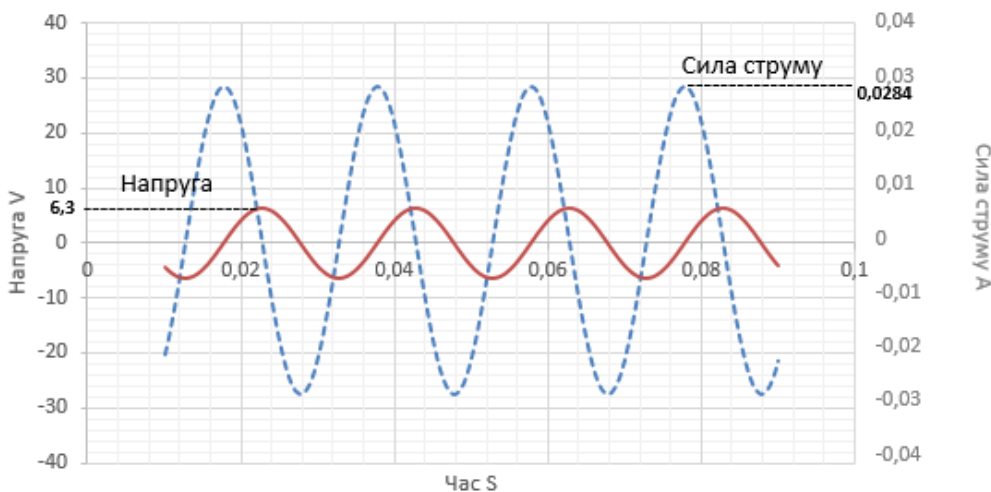


Рис. 3. Результати вимірювання ємності у колі змінного струму.

За формулами з протоколу лабораторної роботи наведеними вище, обрахуємо ємність конденсатора:

$$R_{\text{еф}} = \frac{6,3}{0,0284} \approx 221,8 \text{ Ом}$$

$$C = \frac{1}{2 * 3,14 * 50 * 221,8} \approx 14,3 \text{ мкФ}$$

Також ми можемо спостерігати що коливання напруги на конденсаторі на чверть періоду відстають від коливань струму, тобто зсув фаз між U і I становить $\pi/2$. Відставання коливань напруги від коливань струму, фізично пояснюється тим, що напруга на конденсаторі в будь-який момент часу визначається зарядом конденсатора [3].

Аналогічно виконуємо визначення опору у колі змінного струму, збираємо електричне коло згідно протоколу лабораторної роботи, вмикаємо на 1-2 секунди. Результати вимірювання фізичних величин зберігаємо, розрахунки виконуємо згідно формули з протоколу лабораторної роботи.

Визначаємо опір за формулою: $R = \frac{U}{I} \cos \varphi [1]$.

За результатними вимірювання будуюмо графіки залежності сили струму і напруги від часу, на якому видно, що напруга і сила струму змінюється в однакових фазах, наочно видно зсув фаз між струмом і напругою дорівнює нулеві $\varphi=0$. На графіку бачимо, що напруга і струм одночасно досягають максимальних і мінімальних значень (рис. 4.) [3].

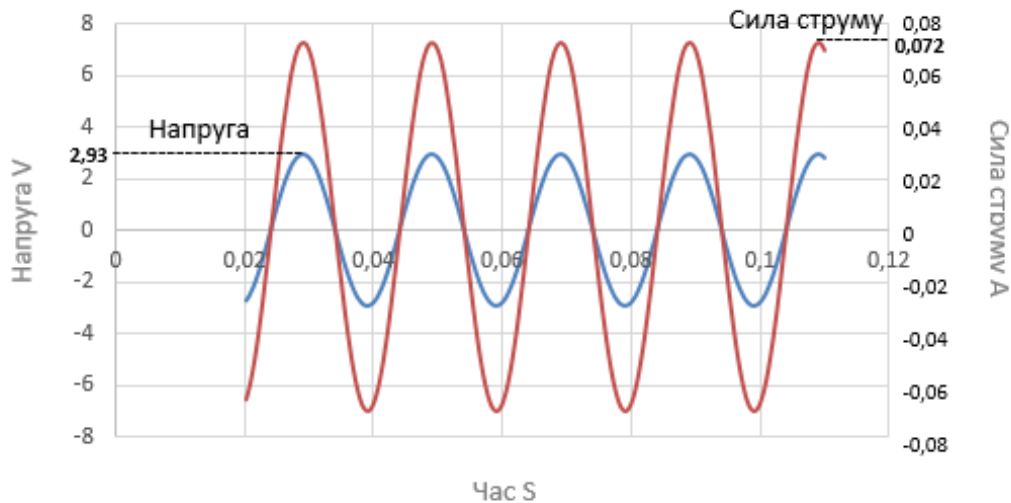


Рис.4. Результати вимірювань опору у колі змінного струму.

Підставляємо результати вимірювань у формули з протоколу лабораторної роботи, отримуємо значення опору яке співпадає з встановленим на магазині опорів:

$$R = \frac{2,93}{0,0725} * 1 = 40,4 \text{ Ом.}$$

Використання АЦП покращує наочність при виконання лабораторних робіт з швидкоплинними фізичними процесами, наприклад при використанні ЕРС змінного струму. Час на підготовку та виконання лабораторної роботи значно скорочується, є можливість отримати результати у вигляді графіків, діаграм, таблиць практично одразу після вимірювання на ПК, застосовувати математичні формули в Excel-сумісному програмному забезпеченні для аналізу результатів вимірювання. Завдяки використанню АЦП підвищує наочність експерименту та візуалізація результатів, за рахунок цього підвищується зацікавленість студента до предмету.

Модернізація лабораторних робіт з загального курсу фізики, є необхідністю сьогодення. Виконання лабораторних робіт пов'язана з іншими видами занять, вона сприяє реалізації міжпредметних зв'язків, принципу зв'язку теорії та практики, а також розвитку інтелектуально-пізнавальної активності у студентів. Підчас виконання лабораторних робіт, реалізується єдність

практичної та пізнавальної діяльності студента при вивченні загального курсу фізики. Задіюються низки аналізаторів, що сприяють процесу формування наукових навичок, умінню використовувати методи науково-дослідської діяльності.

Список використаних джерел

1. Загальна фізика. Лабораторний практикум: Навч. посібник. / В.М. Барановський, П.В. Бережний, І.Т. Горбачук та ін. За заг. ред. І. Т. Горбачука. Київ: Вища школа, 1992. 509 с.

2. Інструкція користування вимірювальним комплексом. ІТМ лабораторія. Лютий 5, 2018. URL: <https://www.itm.com.ua/інструкції/129/> дата звернення (23.04.2021)

3. Кучерук, І. М. Загальний курс фізики: навчальний посібник для студ. техн. і пед. спец. вищих навчальних закладів: у 3-х т., т.2: Електрика і магнетизм / І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук, П. П. Луцик; за ред. І. М. Кучерука. - 2-ге вид., виправ.- Київ: Техніка, 2006. - 452 с.

Яремчук Д. М.

магістрантка спеціальності «Середня освіта (Математика)»

факультету математики, інформатики та фізики НПУ імені М.П.Драгоманова

Науковий керівник: канд. фіз.-мат. наук, доцент **Боженок К.В.**

ВИКОРИСТАННЯ СКМ MAPLE ПРИ ВИВЧЕННІ ТЕМИ «ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ»

Анотація. У статті досліджено використання СКМ Maple при вивченні математики в старшій школі, зокрема, при вивченні теми «Похідна та її застосування». Розкрито можливості та переваги розглянутої системи комп'ютерної математики на конкретних задачах з підручників.

Ключові слова: інформаційні технології, система комп'ютерної математики Maple, похідна функції, монотонність, екстремум, дослідження функції.

Abstract. In the article are obtained the use of SCM Maple in the study of mathematics in high school, in particular, in the study of “Derivative and its application”. The possibilities and advantages of the considered system of computer mathematics on specific problems from textbooks are revealed.

Keywords: information technology, computer mathematics system Maple, function derivative, monotonicity, extremum, function research.

Вступ. У 10 класі учні переходять до вивчення такого розділу математики як «Математичний аналіз» [1]. Звичайно, в школі обмежуються вивченням лише основних елементів математичного аналізу. Починається знайомство з питань, що пов'язані із поведінкою функції, а саме із теми «Похідна та її застосування». Ця тема займає важливе місце у шкільному курсі математики, в першу чергу тому, що має велике прикладне значення, а за допомогою похідною досліджують процеси і явища в природничих, соціальних і економічних науках.

В той же час тема «Похідна та її застосування» складна у вивченні і не всім вона дається. При вивченні цієї теми з'являються такі відомі нам труднощі, які пов'язані із здійсненням граничних переходів, із перетворенням виразів, із побудовою графіків. Тому дуже важливо надавати викладу матеріалу більшої наочності і більш конкретизованого характеру.

Ефективним для вирішення цього питання є використання інформаційно-комунікативних технологій під час уроків математики [2]. ІКТ дозволяє зробити заняття більш наочним і цікавим; полегшити сприйняття матеріалу; провести необхідну перевірку виконаних задач і візуалізувати матеріал.

В статті ми розглянемо систему комп'ютерної алгебри Maple. З одного боку, одна з найважливіших особливостей Maple – строга (і досить вдала)

відповідність структури команд логіці математичного мислення. Maple вчить строгому розумінню математичних виразів – як сукупності символів, наявність яких обов'язково, а порядок застосування принципово важливий. Пакет Maple може виконувати обчислення будь-якого ступеня складності й обмежений лише можливостями техніки. З іншого боку, пакет Maple має унікальні графічні та анімаційні можливості моделювання, а графічна форма подання інформації – одна з найважливіших для процесу навчання [3-4]. Отже, **метою даної роботи** є висвітлення основних особливостей, можливостей і зручностей програми Maple при вивченні теми «Похідна та її застосування».

Основний матеріал. У середовищі Maple можна легко знаходити похідні та диференціали від будь-яких функцій, точки екстремуму функції, найбільше і найменше значення функції, будувати графіки функцій.

Для обчислення похідних Maple є дві команди (див. [5, С.40]):

1) прямого виконання – $\mathit{diff}(f,x)$, де f – функція, яку слід продиференціювати, x – ім'я змінної, за якою проводиться диференціювання.

2) відкладеного виконання – $\mathit{Diff}(f,x)$, де параметри команди такі самі, як і в попередній.

Після виконання диференціювання, отриманий вираз бажано спростити. Для цього слід використати команди $\mathit{simplify factor}$ або expand , залежно від того, в якому вигляді вам потрібний результат.

Покажемо можливості СКМ Maple при розв'язуванні прикладів з підручника Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. «Алгебра і початки аналізу» (профільний рівень) для 10 класу.

Задача 36.4. Продиференціюйте функцію:

1) $y = \sqrt[4]{x}$;

2) $y = \sqrt[8]{x^7}$.

№36.4

1) $y := \sqrt[4]{x}$;

$\mathit{diff}(y, x);$

$$x^{1/4} \quad (7)$$

$$\frac{1}{4 x^{3/4}} \quad (8)$$

2) $y := \sqrt[8]{x^7}$;

$\mathit{diff}(y, x);$

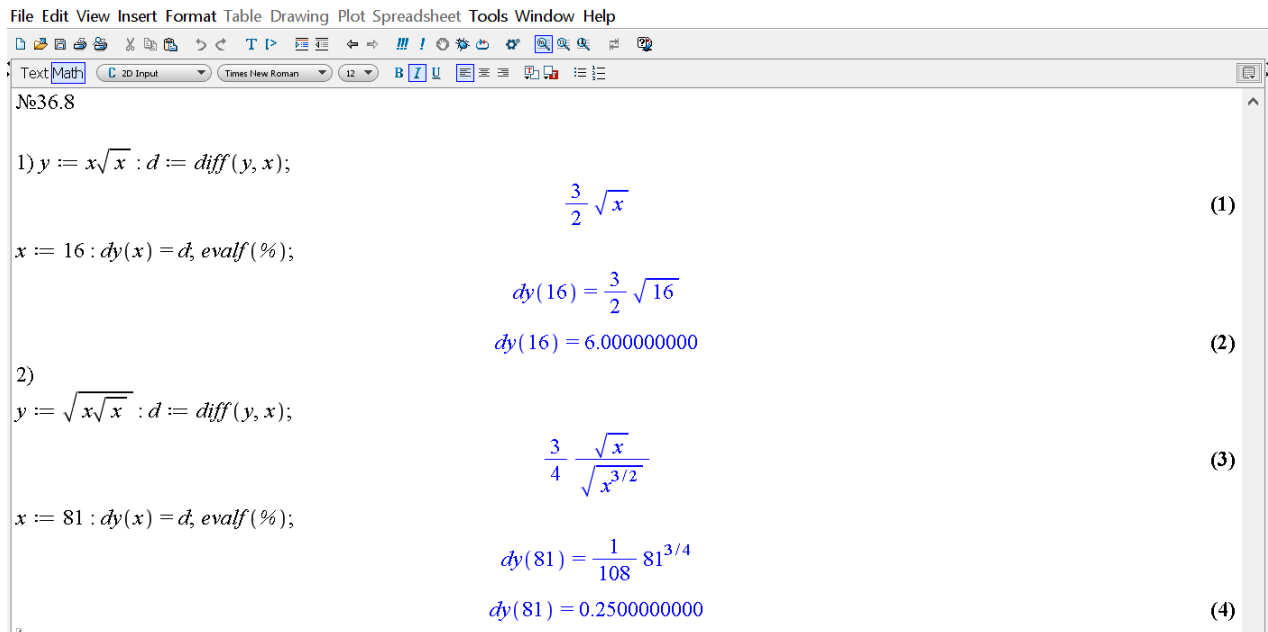
$$(x^7)^{1/8} \quad (9)$$

$$\frac{7}{8} \frac{x^6}{(x^7)^{7/8}} \quad (10)$$

Задача 36.8. Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0 :

1) $f(x) = x\sqrt{x}$, $x_0 = 81$;

2) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}}$, $x_0 = 16$.



№36.8

1) $y := x\sqrt{x} : d := \text{diff}(y, x);$

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} \quad (1)$$

$x := 16 : dy(x) = d, \text{evalf}(\%);$

$$dy(16) = \frac{3}{2}\sqrt{16}$$

$$dy(16) = 6.000000000 \quad (2)$$

2)

$y := \sqrt{x\sqrt{x}} : d := \text{diff}(y, x);$

$$\frac{3}{4} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^{3/2}}} \quad (3)$$

$x := 81 : dy(x) = d, \text{evalf}(\%);$

$$dy(81) = \frac{1}{108} 81^{3/4}$$

$$dy(81) = 0.2500000000 \quad (4)$$

В останній задачі ми проходимо етап і знаходження похідної і обчислення її в точці за допомогою команди *evalf*.

За допомогою команди СКА Maple *solve* можна розв'язувати нерівності та визначати інтервали знакосталості першої похідної. Таким чином ми можемо визначити інтервали зростання та спадання функції.

Задача 39.3. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7$.

Знайдемо першу похідну, оцінемо інтервали, де похідна додатна і від'ємна. В результаті маємо, що на інтервалі $(1; +\infty)$ функція зростає, а на інтервалах $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$ функція спадає:

```

№39.3
1) y := 1/4 x^4 - 1/3 x^3 - 7; d := diff(y, x);
                                     x3 - x2 (1)
solve(d > 0, x);
                                     RealRange(Open(1), ∞) (2)
solve(d < 0, x);
                                     RealRange(-∞, Open(0)), RealRange(Open(0), Open(1)) (3)

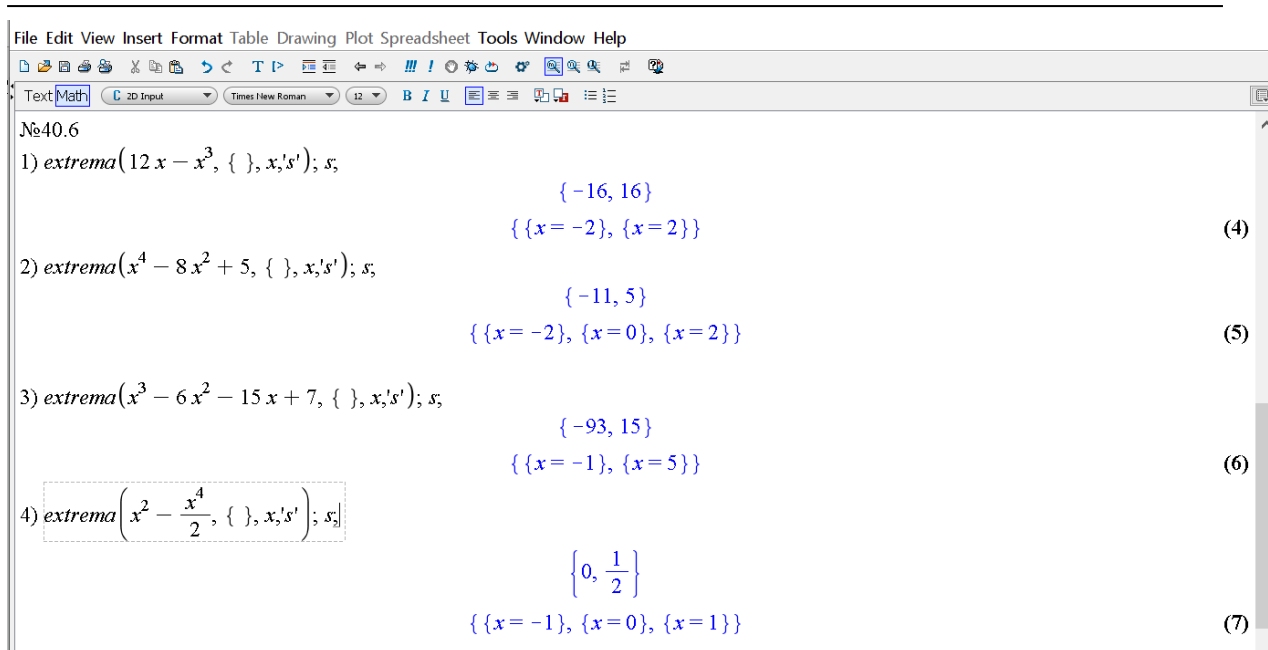
```

У Maple для дослідження функцій на екстремум є команда *extrema*(*f*, {*cond*}, *x*, *s*'), де *f* – функція, екстремуми якої шукаємо, у фігурних дужках вказується обмеження для змінної, *x* – ім'я змінної, за якою шукаємо екстремум, *s*' – ім'я змінної, якій буде надана координата точки екстремума (див. [5, С.45-47]). Нажаль, ця команда не дає відповідь на питання, яка точка є максимумом, а яка – мінімумом. Для знаходження максимуму використовується команда *maximize*, а для мінімуму – *minimize* з додатковим параметром *location*, який дозволяє виводити як сам максимум (мінімум), так і координати точок максимуму (мінімуму). Ці дві команди швидко знаходять абсолютні екстремуми, проте не завжди застосовні для знаходження локальних екстремумів.

Задача 40.6. Знайдіть точки мінімуму і максимуму функції:

- 1) $f(x) = 12x - x^3$;
- 2) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$;
- 3) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$;
- 4) $f(x) = x^2 - \frac{x^4}{2}$.

Застосуємо команду *extrema*, отримаємо:



№40.6

1) $\text{extrema}(12x - x^3, \{ \}, x, s')$; s ;

$$\{-16, 16\}$$

$$\{ \{x = -2\}, \{x = 2\} \}$$
 (4)

2) $\text{extrema}(x^4 - 8x^2 + 5, \{ \}, x, s')$; s ;

$$\{-11, 5\}$$

$$\{ \{x = -2\}, \{x = 0\}, \{x = 2\} \}$$
 (5)

3) $\text{extrema}(x^3 - 6x^2 - 15x + 7, \{ \}, x, s')$; s ;

$$\{-93, 15\}$$

$$\{ \{x = -1\}, \{x = 5\} \}$$
 (6)

4) $\text{extrema}\left(x^2 - \frac{x^4}{2}, \{ \}, x, s'\right)$; s ;

$$\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$$

$$\{ \{x = -1\}, \{x = 0\}, \{x = 1\} \}$$
 (7)

Також, за допомогою СКА Maple можна знайти інтервали опуклості і точки перегину функцію за допомогою дослідження другої похідної.

Задача 42.7. Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:

1) $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - x + 1.$

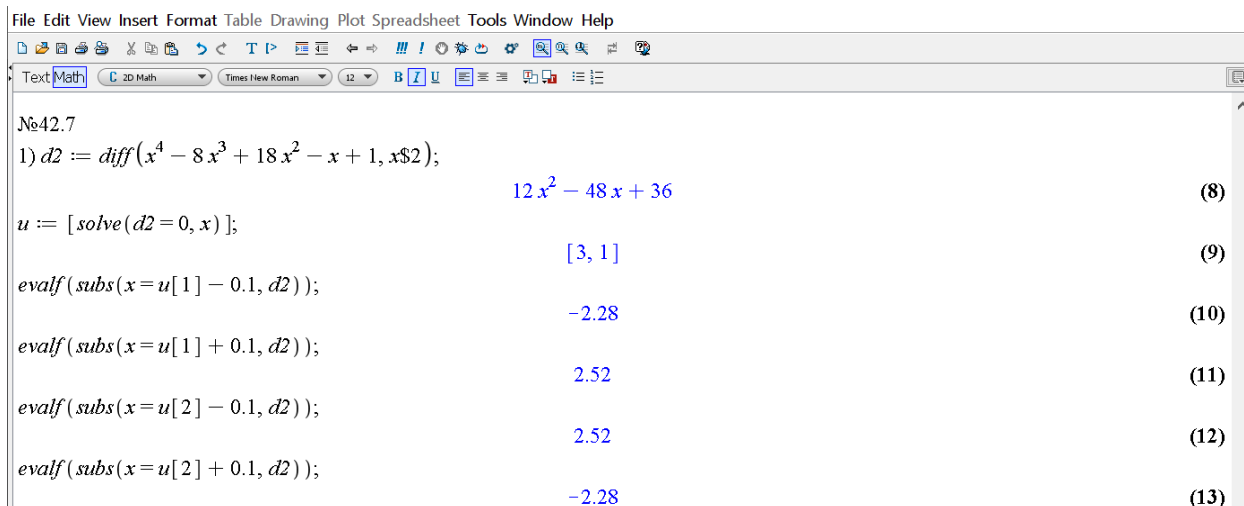
Дослідимо функцію на опуклість і перегин:

а) Знайдемо другу похідну.

б) Знайдемо стаціонарні точки $x = 3$ та $x = 1$ функції за другою похідною.

в) Перевіримо зміну знака другої похідної при переході через ці точки.

Бачимо, що знак змінюється, отже, точка $x = 3$ та $x = 1$ є точками перегину.



№42.7

1) $d2 := \text{diff}(x^4 - 8x^3 + 18x^2 - x + 1, x\$2)$;

$$12x^2 - 48x + 36$$
 (8)

$u := [\text{solve}(d2 = 0, x)]$;

$$[3, 1]$$
 (9)

$\text{evalf}(\text{subs}(x = u[1] - 0.1, d2))$;

$$-2.28$$
 (10)

$\text{evalf}(\text{subs}(x = u[1] + 0.1, d2))$;

$$2.52$$
 (11)

$\text{evalf}(\text{subs}(x = u[2] - 0.1, d2))$;

$$2.52$$
 (12)

$\text{evalf}(\text{subs}(x = u[2] + 0.1, d2))$;

$$-2.28$$
 (13)

г) Значення функції в точках перегину дорівнює:

$$f(3) = 25; \quad f(1) = 11.$$

д) Визначимо інтервали знакосталості другої похідної за допомогою команди *solve*. Маємо, що на інтервалах $(-\infty; 1)$ і $(3; +\infty)$ графік функції є

опуклим вниз (увігнути), а на інтервалі (1;3) графік функції є опуклим вгору (опуклим).

```

File Edit View Insert Format Table Drawing Plot Spreadsheet Tools Window Help
Text Math C 2D Math Times New Roman 12 B U
solve(d2 > 0, x);
RealRange(-∞, Open(1)), RealRange(Open(3), ∞) (14)
solve(d2 < 0, x);
RealRange(Open(1), Open(3)) (15)

```

Нарешті, ми дісталися до останнього пункту теми «Похідна та її застосування» – побудова графіків функцій.

Розширений план дослідження функції та побудова її графіка включає в себе наступні основні пункти:

1. Знайти область визначення функції. Дослідити на неперервність і знайти точки розриву функції.
2. Дослідити функцію на парність, періодичність.
3. Знайти нулі функції. Знайти проміжки знакосталості функції.
4. Знайти асимптоти.
5. Знайти проміжки зростання і спадання функції.
6. Знайти точки екстремуму та значення функції в точках екстремуму.
7. Знайти точки перегину і проміжки опуклості функції.

Покажемо можливості СКМ Maple для дослідження функції та побудови графіку функції із використанням похідних першого і другого порядку (див. [6]).

Задача 43.3. Дослідіть функцію та побудуйте її графік:

$$7) f: = x \rightarrow (2(x - 1))/x^2;$$

$$x \rightarrow \frac{2(x - 1)}{x^2}$$

1) Знайдемо точки розриву функції за допомогою команди *discont(f(x),x)*:

$$\{0\}$$

Таким чином, **область визначення** функції є об'єднання двох проміжків $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2) Досліджуємо поведінку функції на межах області визначення за допомогою функції *limit(f(x), x = a)*:

$$\text{Limit}(f(x), x = -\text{infinity}) = \text{limit}(f(x), x = -\text{infinity});$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(x - 1)}{x^2} = 0$$

$$\text{Limit}(f(x), x = 0, \text{left}) = \text{limit}(f(x), x = 0, \text{left});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(x-1)}{x^2} = -\infty$$

$Limit(f(x), x = 0, right) = limit(f(x), x = 0, right);$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(x-1)}{x^2} = -\infty$$

$Limit(f(x), x = -infinity) = limit(f(x), x = infinity);$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x-1)}{x^2} = 0$$

Отже, **горизонтальних асимптот немає, вертикальна асимптота: $x = 0$.**

3) Перевіримо існування похилих асимптот $y=kx+b$, де $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$,

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx):$$

$$k := limit(f(x)/x, x = -infinity);$$

$$b := limit(f(x) - k * x, x = -infinity);$$

$$k: = 0$$

$$b: = 0$$

Похилих асимптот немає.

4) Дослідимо функцію на екстремум і монотонність.

Знайдемо першу похідну:

$$f1 := x \rightarrow diff(f(x), x); normal(f1(x));$$

$$x \rightarrow \frac{d}{dx} f(x)$$

$$= \frac{2(x-2)}{x^3}$$

Прирівнюючи похідну до нуля, знайдемо стаціонарні точки функції:

$$z := [solve(f1(x) = 0, x)];$$

$$[2]$$

У нас вийшов один корінь $x = 2$.

Визначимо зміну знака похідної при переході через точку для $x = 2$:

$$evalf(subs(x = z[1] - 0.1, f1(x)));$$

$$evalf(subs(x = z[1] + 0.1, f1(x)));$$

$$0.0291587694$$

$$-0.0215959400$$

Знак похідної змінюється з $+$ на $-$, тому точка $x = 2$ є точкою **локального максимуму**. Значення функції в цій точці дорівнює:

$$f(2);$$

$$\frac{1}{2}$$

Визначимо інтервали зростання та спадання функції:

$solve(f1(x) > 0, x);$

$RealRange(Open(0), Open(2))$

на інтервалі **(0; 2)** функція зростає.

$solve(f1(x) < 0, x);$

$RealRange(-\infty, Open(0)),$

$RealRange(Open(2), +\infty)$

на інтервалах **$(-\infty; 0)$, $(2; +\infty)$** функція спадає.

5) Дослідимо функцію на опуклість і перегин.

Знайдемо другу похідну:

$f2 := x \rightarrow diff(f1(x), x); normal(f2(x));$

Знайдемо стаціонарні точки функції за другою похідною:

$u := [solve(f2(x) = 0, x)];$

[3]

Одержали стаціонарну точку $x = 3$.

Перевіримо зміну знака другої похідної при переході через цю точку:

$evalf(subs(x = u[1] - 0.1, f2(x)));$

$evalf(subs(x = u[1] + 0.1, f2(x)));$

- 0.0056554609

0.0043312496

Знак змінюється, отже, точка $x = 3$ є **точкою перегину**. Значення функції в точці перегину дорівнює нулю:

$f(3);$

$\frac{4}{9}$

Визначимо інтервали опуклості вниз і опуклості вгору графіка функції:

$solve(f2(x) > 0, x);$

$RealRange(Open(3), +\infty)$

на інтервалі **$(3; +\infty)$** графік функції є **опуклим вниз** (увігнутий),

$solve(f2(x) < 0, x);$

$RealRange(-\infty, Open(0)),$

$RealRange(Open(0), Open(3))$

на інтервалах **$(-\infty; 0)$ і $(0; 3)$** графік функції є **опуклим вгору** (опуклим).

6) За даними дослідження будемо графік функції (Рис.1). Представимо його у вигляді графіка самої функції, графіків асимптот, точок екстремуму та перегину:

$with (plots):$

$f := x \rightarrow (2(x - 1))/x^2);$

```
P1:= plot(f(x), x = -10..10, y = -20..5, discontin = true, color
= red, thickness = 2):
```

```
P2:= pointplot ([2, 1/2], [3, 4/9], symbolsize = 15):
```

```
display(P1, P2);
```

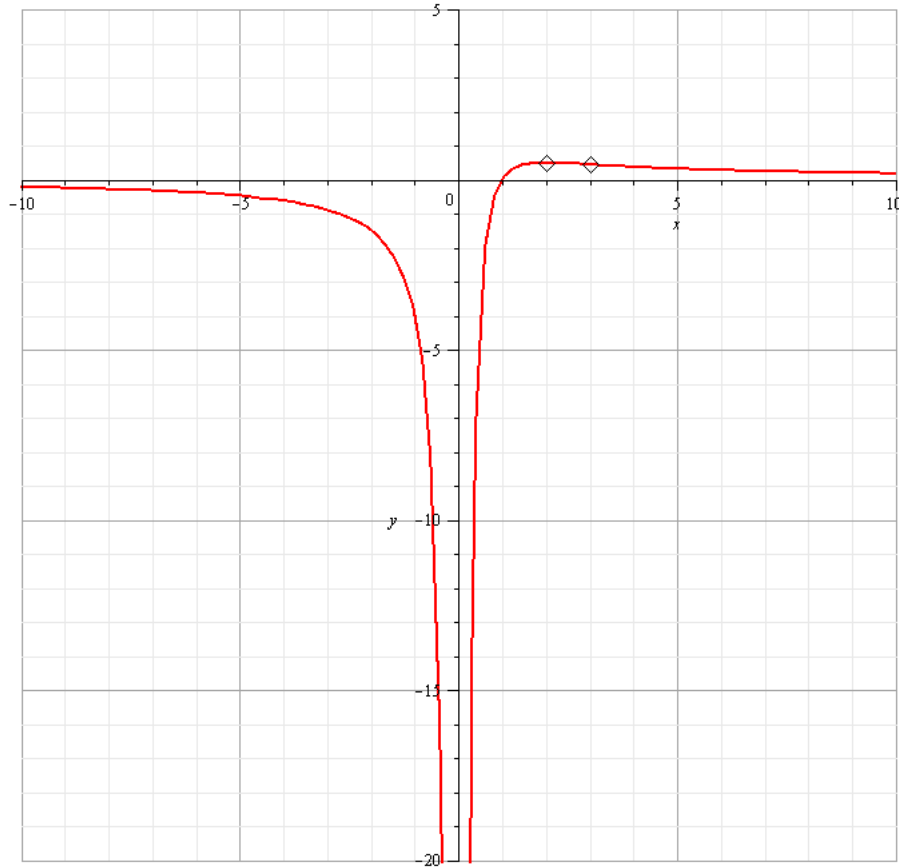


Рис.1

Висновки. Для учнів, які добре засвоїли матеріал з теми «Похідна та її застосування» дуже зручним є використання СКМ Maple, для швидкого пошуку похідної та збереження часу для дослідження функції та побудови графіку функції.

Використання СКМ Maple дає змогу полегшити розрахунки, зменшити витрати часу на розв'язування задачі. При цьому з'являється більше можливості для проведення обчислювальних експериментів, процес навчання стає більш динамічним і наочним, що сприяє кращому засвоєнню матеріалу.

Список використаної літератури

1. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018. — 400 с.

2. Рамський Ю.С. Місце і роль математичної освіти в інформаційному суспільстві / Ю.С. Рамський, К.І. Рамська // Інформатика та інформаційні технології в навчальних закладах. – 2008. – № 6 (18). – С. 53 – 59.
3. Гриб'юк О.О. Використання систем комп'ютерної математики у контексті моделі змішаного навчання / О. О. Гриб'юк, В. Л. Юнчик // Математика. Інформаційні технології. Освіта: [зб. статей] / СНУ імені Лесі Українки. – Луцьк – Світязь, 2015. – С. 52 – 71.
4. [Тютюнник О. І.](#) Використання систем комп'ютерної математики для створення програмних засобів навчального призначення / О. І. Тютюнник, В. М. Михалевич // [Вісник Вінницького політехнічного інституту.](#) –2013. – № 6. – с.111–116.
5. Савотченко С.Е. Методы решения математических задач в *Maple*: Учебное пособие / С.Е. Савотченко, Т.Г. Кузьмичева. – Белгород: Изд. Белаудит, 2001. – 116 с.
6. Дрозденко В.О. Maple в математиці: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів III та IV рівнів акредитації / В.О. Дрозденко. – Біла Церква, 2019. – 328 с.