

**Уманець Мирослав Євгенійович,
студент 2 курсу,
спеціальності «Математика»**

**Науковий керівник:
доктор наук, професор
Працьовитий Микола Вікторович**

«Ланцюгові A_2 дроби, проблема раціональності числа»

Актуальність дослідження. Розділ математики, присвячений теорії ланцюгових дробів, є один із найпопулярніших розділів сучасної математики. Своє широке прикладне застосування ланцюгові дроби знайшли в астрономії, інформатиці та інших галузях, що використовують великий об'єм даних. Ланцюгові дроби пов'язані з теорією наближень дійсних чисел і функцій раціональними дробами та раціональними функціями, теорією динамічних систем, механікою зубчатих передач, літочисленням. Нас цікавить зображення чисел нескінченними ланцюговими дробами. Ще на початку XX століття в роботах О. Хінчина [3] було закладено основи метричної теорії зображення дійсних чисел елементарними ланцюговими дробами, елементами яких є натуральні числа.

Нагадаємо, що *скінченним ланцюговим дробом* називається число записане у вигляді

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots \frac{1}{a_{s-1} + \frac{1}{a_s}}}}} \equiv [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n], \quad (1)$$

де a_0 - ціле число, а всі інші $a_1, \dots, a_s$ натуральні числа. Подальші дослідження властивостей представлення числа у формі ланцюгового дроби дозволили встановити певний відношення, зокрема:

- 1) будь-яке раціональне число дорівнює деякому скінченному ланцюговому дроби;
- 2) існує один і тільки один ланцюговий дріб, рівний даному раціональному числу;
- 3) для довільного дійсного числа існує розклад в ланцюговий дріб (1).

Дані твердження встановлюють взаємно-однозначну відповідність між раціональними числами і скінченним ланцюговими дробами.

Окрім відсутності «самоподібних» метричних властивостей такого представлення, що безумовно викликає технічні труднощі його використання, нескінченно символічність зображення є недоліком при кодуванні чисел. Дбаючи про «економність» зображення, Працьовитим М.В., Дмитренко С.О. і Кюрчевим Д.В. [1] була розроблена теорія зображення чисел нескінченними ланцюговими дробами, елементами яких є лише два числа α_1, α_2 , яке ми називаємо ланцюговим A_2 -зображенням. Множину чисел $A_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ ми називаємо алфавітом. Розглядаючи числа алфавіту такі, що $0 < \alpha_1 < \alpha_2$ і $\alpha_1 \alpha_2 = \frac{1}{2}$, встановлено, що для довільного числа x з деякого відрізка $[\beta_1; \beta_2]$ існує набір чисел $(\alpha_n) \in L = A_2 \times A_2 \times \dots$, такий що

$$x = \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 + \ddots \frac{1}{\alpha_{n-1} + \frac{1}{\alpha_n}}}}} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}, \quad (2)$$

Нескінченний ланцюговий дріб виду (2) називається A_2 -представленням числа x , а його скорочений (формальний) запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ - ланцюговим A_2 -зображенням.

Ми цікавимося зображення чисел нескінченними ланцюговими дробами з двосимвольним алфавітом $A_2 = \{\frac{1}{2}; 1\}$. При такому виборі алфавіту відрізком $[\beta_1; \beta_2]$ є відрізок $[\frac{1}{2}; 1]$.

Геометрія ланцюгового A_2 -зображення будучи двосимвольною системою кодування має принципові відмінності від класичного двійкового зображення [2] та зображення елементарними дробами і має свою систему циліндричних множин, що породжують свою власну геометрію, на якій ґрунтується метрична теорія. Наведемо основні поняття і факти геометрії зображення.

Означення. Циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ називатимемо множину $\Delta'_{c_1 c_2 \dots c_m}$ всіх $x \in [\frac{1}{2}; 1]$, які мають ланцюгове A_2 -зображення з першими m елементами, що дорівнюють відповідно $c_1, c_2, \dots, c_m$, тобто $\Delta'_{c_1 c_2 \dots c_m} = \{x: x = [c_1, c_2, \dots, c_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots], a_{m+i} \in A_2\} [1]$.

Зауважимо, що циліндр $\Delta'_{c_1 c_2 \dots c_m}$ A_2 -зображення є відрізком. Використовуючи підхідні дроби [3], можна вписати довжину циліндра і основне метричне відношення.

Існують числа, які мають два A_2 -зображення, це числа виду

$$\left[0; a_1, a_2, \dots, a_n, \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}, 1\right)\right] = \left[0; a_1, a_2, \dots, a_n, 1, \left(1, \frac{1}{2}\right)\right],$$

їх ми називаємо A_2 -раціональними, решта чисел A_2 -раціональні мають єдине зображення.

Ідея вибору терміну A_2 -раціональні була породжена зв'язком раціональних чисел і їх A_2 -раціональними зображеннями. А саме: кожне A_2 -раціональне зображення є зображенням раціонального числа, проте обернене твердження невірне. І вичерпної відповіді на сьогодні про критерій раціональності числа за його ланцюговим A_2 -зображенням немає. Наведемо деякі факти, а також контрприклад, пов'язані з цією проблемою.

Добре відомо, що в десятковій системі числення кожне ірраціональне подається у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу, на відміну від раціонального, яке можна подати у вигляді або скінченного або нескінченного але періодичного дробу.

Які твердження з цього приводу можна сформулювати для ланцюгового зображення.

Очевидно, що кожне A_2 -раціональне число є раціональним. Проте чи твердження вірне навпаки ми спробуємо розібратися. Якщо ввести в розгляд скінченне A_2 -зображення, то кожне A_2 -раціональне число буде мати скінченну множину скінчених A_2 -зображень. А оскільки очевидним є той факт, що скінченне A_2 -зображення є раціональним числом (як скінченна кількість раціональних операцій над раціональними числами $\frac{1}{2}$ і 1), може виникнути ілюзія, що всі раціональні числа маючи скінченне A_2 -зображення і є A_2 раціональними.

Мають місце розклади: $\frac{2}{3} = [0; 1, 1, 1] = \left[0; \frac{1}{2}, 1\right]$, $\frac{6}{7} = \left[0; \frac{1}{2}, 1, 1, 1\right] = \left[0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right]$ і інші. Спростовує гіпотезу про те, що кожне раціональне число є A_2 -раціональним приклад числа $x = \frac{5}{6}$, яке має скінченний розклад $\frac{5}{6} = \left[0; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, 1, 1, \frac{1}{2}\right]$ і нескінченний періодичний розклад $\frac{5}{6} = \left[0; \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, \frac{1}{2}\right)\right]$.

У доповіді будуть представлені результати дослідження проблеми раціональності числа за його A_2 -зображенням та наведені деякі приклади.

Список використаної літератури:

1. Дмитренко С.О., Кюрчев Д.В., Працьовитий М.В. Ланцюгове A_2 -зображення дійсних чисел// Український математичний журнал. – 2009, том 61, №4. – С.452-463
2. Ратушняк С.П., Тарасенко С.О. Одна фрактальна функція представлена ланцюговим A_2 -зображенням// Студентські фізико-математичні етюди. – К.: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова.-2017.-№16 – С.26-32
3. Хинчин А.Я. Цепные дроби.-М.: Наука,1978.-116с.